第二章 文獻回顧

本論文應用賽局理論描述市場投資人行為，建立套利模型，進一步評價選擇權合理價格。首先於第一節介紹目前選擇權評價的幾種重要基本理論及其架構，如 Black-Scholes 歐式選擇權評價模型、平賭過程評價方法、還原風險中立機率測度，在市場無套利機會時求得選擇權合理的價格，概略介紹近代學者在選擇權評價上的研究。第二節簡介賽局理論的分類、基本元素、相對應的均衡觀念，並回顧結合賽局理論應用於選擇權的相關文獻。

2.1 Black-Scholes 歐式選擇權評價模型

由 Black 與 Scholes 兩位財務學者於 1973 年所提出建構於連續時間下的歐式選擇權評價模型，最廣為人知。其公式有下列基本假設：

1. 選擇權的持有期間，無風險利率 r 為一常數
2. 標的資產於到期日前未發放股利
3. 考慮歐式選擇權
4. 標的資產價格變動為連續且滿足幾何布朗運動，即

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dS_t ：標的資產瞬間價格變動

$\mu S_t dt$ ：漂浮項

$\sigma S_t dW_t$ ：擴散項

μ ：標的資產的期望報酬率

σ ：標的資產報酬率的波動度

W_t ：標準布朗運動

5. 無交易成本且標的資產可無限分割與允許放空
6. 市場中無套利機會
7. 證券之交易是連續性的

Black 與 Scholes 利用上述假設，建構一投資組合，進行避險。在無套利機會下，投資組合所帶來的報酬必等於無風險利率 r。利用 Ito 引理，可得到歐式選擇權價格函數 $F(S_t,t)$ 滿足下列偏微分方程式

$$-rF+F_t+rF_sS_t+\frac{1}{2}F_{ss}\sigma^2S_t{}^2=0,\ S_t\geq 0,\ 0\leq t\leq T$$

而到期時買權現金流量 $F(T)=\max(S_T-k,0)$ 為邊界條件(boundary condition)，即可導出歐式買權的合理價格 $C_t=F(S_t,t)$ 的公式解

$$C_t=S_tN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

其中

$$d_1=\frac{\ln(\frac{S_t}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

$N(d_i)=\int_{-\infty}^{d_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$，$i=1,2$ 為標準常態分配之累積機率密度函數

C_t：歐式買權於時點 t 的價格

S_t：標的資產於時點 t 的價格

t：目前時點(以年為單位)

T：歐式買權的到期日(以年為單位)

K：履約價

r：無風險利率(以年為單位計算)

σ：標的資產報酬率的瞬間波動度

歐式賣權的評價公式，可根據買權賣權等價理論(put-call parity)導出，其中 P_t 表示歐式買權於時點 t 的價格，賣權合理的價格為

$$P_t=-S_tN(-d_1)+Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

2.2 平賭過程評價方法

平賭過程評價法相較於 Black-Scholes 公式解更為方便簡單，利用測度轉換，將非平賭過程的資產 S_t 的隨機變動過程，轉換成為在新測度下的平賭(martingale)過程。

假設一組機率測度 Q 使得

$$e^{-r(T-t)}E_t^Q\left[S_{t+\Delta t}\middle|I_t\right]=S_t,\quad 0\le t\le T$$

則標的資產價格的隨機過程在測度 Q 下為平賭過程，此時的 Q 稱為等價平賭測度，即風險中立機率測度。當市場為無套利機會存在時，必存在 Q 等價於市場所決定出來的主觀機率測度 P。最後以此風險機率測度 Q 來評價衍生性商品，

$$C_t=e^{-r(T-t)}E_t^Q\left[\max(S_t-K,0)\right]$$

所得到的結果與 Black-Scholes 公式解相同(Harrision 與 Kreps, 1979)。

2.3 還原風險中立機率測度

Black-Scholes 歐式買權評價公式中假設波動度為常數，在股市的波動度穩定之下，所預測的價格與市場相差無幾，但在 1987 年全球股市崩盤之後，Black－Scholes 評價公式所計算的價格與市場產生大幅誤差，原因出於波動度為常數的假設與實際不符。此外，波動度的計算上本來就相當困難，為解決這些問題，必須發展出新的評價公式。Rubinstein 與 Jackwerth (1996)的無母數還原風險中立機率測度的方法，與 King (2002)所提出由套利模型導出拉格朗日乘子可行性問題，以求得風險中立機率測度，就可以避開必須估計波動度的問題。

2.3.1 無母數還原風險中立機率測度的方法

Rubinstein (1994)提出隱含二元樹法，即是利用市場所觀察的價格，反推一組隱含的風險中立機率測度作為評價測度。假設此市場為有效率市場，選擇權的

市場價格為投資者所認同，即價格由購買者與出售者相互買賣所形成的價格來決定，每一瞬間有效率的整合買價(bid)與賣價(ask)以決定瞬間證券價格，且相差不大，所以根據市場上所得的資訊，可得知

$$S^b \le S \le S^a,\ \ C_i^b \le C_i \le C_i^a,\ \ i = 1, 2, ..., n$$

其中 S^b 與 S^a 為標的資產的買價與賣價，C_i^b 與 C_i^a 為對應於履約價為 K_i 的買權之買價與賣價，且假設有 n 檔買權，$i = 1, 2, ..., n$。

假設先驗風險中立機率為 $P = (p_1, p_2, ..., p_m)$，其中 p_j 代表標的資產 S_j 由低至高順序排列所對應之機率， $j = 1, 2, ..., n$ 。且滿足在無套利的假設下，目標是找出一組與先驗機率 P 差距最小的風險中立機率測度 Q，標的資產與選擇權為貸土過程的條件，即可得 Rubinstein 與 Jackwerth 所提出的無母數規劃模型。

$$\min\ \ \sum_{j=1}^{m} (p_j - q_j)^2$$

$$\text{s.t.}\quad S^b \le S \le S^a$$

$$C_i^b \le C \le C_i^a \qquad\qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$S = r^{-t} d^t \sum_{j=1}^{m} q_j S_j$$

$$C_i = r^{-t} \sum_{j=1}^{m} q_j \max[S_j - K_i, 0] \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

$$q_j \ge 0,\ \ j = 1, 2, ..., n$$

求得最佳機率測度 Q ，利用此機率測度即可求出選擇權的合理價格。

但若先驗機率選取不佳，即便還原出風險中立機率測度，此測度的可信度也令人質疑，張瓊方(2006)提出在未給定先驗機率之下，放寬平賭限制式，且考慮

機率測度平滑可微的性質，加入平滑限制式，$2q_j - q_{j+1} - q_{j-1} \le A$，$A$ 為一個相當小的正數，使相鄰三點機率非常靠近，目標為誤差值最小，完整的線性規劃為

$$\min \sum_{i=1}^{n} (d_{i,c}^{+} + d_{i,c}^{-} + d_{i,p}^{+} + d_{i,p}^{-})$$

$$\text{s.t.} \quad S = r^{-T} d^{T} \sum_{j=1}^{m} q_j S_j$$

$$C_i = r^{-T} \sum_{j=1}^{m} q_j \max[0, S_j - K_i] + d_{i,c}^{+} - d_{i,c}^{-} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$P_i = r^{-T} \sum_{j=1}^{m} q_j \max[0, K_i - S_j] + d_{i,p}^{+} - d_{i,p}^{-} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$2q_j - q_{j+1} - q_{j-1} \le A \qquad j = 2, 3, ..., m-1$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

$$q_j \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., m$$

最後利用模型求出的機率測度，即可評價衍生性商品的合理價格。

2.3.2 拉格朗日乘數法還原風險中立機率測度

King (2002)提出一組自我融資的投資組合，利用拉格朗日乘數法所導出的可行性問題還原風險中立機率測度。

假設時間為片段型態，未來標的資產發生的狀態為離散點且有限，即

$$\Omega = \{\omega_{t1}, \omega_{t2}, ..., \omega_{tm}\}, \ t = 0, 1, ..., T, \ j = 1, 2, ..., m$$

其中 n_{tj} 表示狀態樹中對應狀態 ω_{tj} 的節點，集合 N_t 表示在時間 t 之前所有節點的集合。若市場上有 $I+1$ 個可交易之標的資產，在節點 n 的價格分別為 $S = (S_n^0, S_n^1, ..., S_n^I)$，計價單位以資產 $i = 0$ 的價格 S_n^0 必須永遠為正值，如台灣的

定期存款等，令 $r_n = \dfrac{1}{S_n^0}$ ，則每一個標的資產經過標準折現之後的價格皆為 $Z_n^i = r_n S_n^i$ ，$i = 1, 2, ..., I$ ，其中 $Z_n^0 = 1$。而套利過程即為在期初 $t = 0$ 投資組合價值為 0，期間為自我融資過程，在未來每一時點投資組合的利潤非負值，且在到期日 T 時投資組合價值嚴格為正。自我融資的過程可以 $Z_n X_n = Z_n X_{a(n)}$ 表示，$n \in N_t$ ，$t = 1, 2, ..., T$ ，$a(n)$ 為節點 n 所對應的父母節點，其中

$$Z_n X_n = \sum_{i=0}^{I} Z_n^i X_n^i$$

X_n^i 表示對標的資產 i 的持有量，稱 X_n 為交易策略。利用下述規劃模型，檢視透過自我融資的投資組合是否存在套利機會。

$$\begin{aligned}
\max \ & \sum_{n \in N_t} p_n Z_n X_n \\
\text{s.t.} \ & Z_0 X_0 = 0 \\
& Z_n [X_n - X_{a(n)}] = 0, n \in N_t, t = 1, 2, ..., T \\
& Z_n X_n \geq 0, n \in N_T
\end{aligned}$$

其中 P 表示到期日 T 的機率分布，$p_n > 0, n \in N_T$ ，$\sum_{n \in N_T} p_n = 1$。

若套利機會存在，則目標函數為正值，在無交易數量限制時，發散至無窮大；若市場為無套利機會，則目標函數必定為 0。將此模型以拉格朗日乘子轉換成無限制式求極值問題，限制式分別對應 d_0 、d_n 、d_n' ，可以得到

$$L(X, d, d') = \sum_{n \in N_t} p_n Z_n X_n - \sum_{t=1}^{T} \sum_{n \in N_t} d_n Z_n [X_n - X_{a(n)}] - \sum_{n \in N_T} d_n' Z_n X_n, d_n' \leq 0 \qquad (1)$$

在無套利市場下，模型的目標函數為 0，同時式(1)的極值也為 0，可以將式(1)簡化為可行性問題式(2)如下，且排除無任何融資過程的情況。

$$
\begin{aligned}
& d'_n \le 0, n \in N_T \\
& [p_n - d_n - d'_n] Z_n = 0, n \in N_T \\
& d_n Z_n - \sum_{m \in C(n)} d_m Z_m = 0, n \in N_t, t = 0, 1, \ldots, T-1
\end{aligned} \qquad (2)
$$

$C(n)$ 表節點 n 的孩子節點之集合，在式(2)的可行解中，即可推導出風險中立機率測度 $Q = \{q_n = \frac{d_n}{d_0} | n \in N_T\}$ ，使得 $E^Q[Z_{t+1} | N_t] = Z_t$ 。

劉桂芳(2005)利用線性規劃的方式，建立具套利機會的投資組合，以還原風險中立機率測度。當投資人面對同一到期日不同履約價格的多檔買權及賣權，建構一組投資組合，由購買 x_i 口買權及 y_i 口賣權，$i = 1, 2, \ldots, n$，此投資組合的到期折現為 $V(S_T)$ 表示如下

$$V(S_T) = \sum_{i=1}^{m} [e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ - c_i] x_i + \sum_{i=1}^{m} [e^{-r(T-t)} (K_i - S_T)^+ - p_i] y_i$$

假設標的資產於到期日可能發生的狀態為離散點且個數有限，$S_j, j = 1, 2, \ldots, m$ ，當 $V(S_j) \ge 0, j = 1, 2, \ldots, m$ ，具套利機會，以主觀機率 P 對應不同狀態的選擇權投資組合，目標為最大化投資組合現值的期望值，利用線性規劃建構單期套利模型。

$$\max \ \sum_{i=1}^{n} [e^{-r(T-t)} E^P (S_T - K)^+ - c_i] x_i + \sum_{i=1}^{n} [e^{-r(T-t)} E^P (K_i - S_T)^+ - p_i] y_i$$

$$\text{s.t.} \ \ V(S_j) = \sum_{i=1}^{n} [e^{-r(T-t)} (S_j - K)^+ - c_i] x_i + \sum_{i=1}^{n} [e^{-r(T-t)} (K_i - S_j)^+ - p_i] y_i \ge 0, j = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_{i,} \ y_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n$$

將上述模型的限制式分別乘上拉格朗日乘子 $\eta_j \ge 0$ ， $j = 1, 2, \ldots, m$ ，轉換成無限制式求極值問題。

$$L(x,y；\eta)=\sum_{i=1}^{n}[e^{-r(T-t)}E^{P}(S_T-K_i)^{+}-c_i]\,x_i+\sum_{i=1}^{n}[e^{-r(T-t)}E^{P}(K_i-S_T)^{+}-p_i]\,y_i$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{i=1}^{n}[e^{-r(T-t)}(S_j-K_i)^{+}-c_i]x_i+\sum_{i=1}^{n}[e^{-r(T-t)}(K_i-S_j)^{+}-p_i]y_i\right\}\eta_j$$

則可行性問題可簡化如下

$$\sum_{j=1}^{n}[e^{-r(T-t)}(S_j-K_i)^{+}-c_i]\eta_j=0, i=1,2,...,n$$

$$\sum_{j=1}^{m}[e^{-r(T-t)}(K_i-S_j)^{+}-p_i]\eta_j=0, i=1,2,...,n$$

利用 η_j 還原風險中率測度 $Q=(q_1,q_2,...,q_n)$ ，其中

$$q_j=\frac{\eta_j}{\sum_{j=1}^{n}\eta_j}, j=1,2,...,m$$

2.4 賽局理論之簡介

賽局理論被廣泛用於描述世界中的問題，如股市投資、人際關係、商場上的利益競爭、遊戲競賽等等。1994 年 Von Neumann 與 Morgenstern 所著的 The Theory of Games and Economic Behavior 一書，此書將參賽者的策略，以數學模式來描述與分析，透過不同策略的評估，在考慮對手策略下，求出自己可獲得最大報酬的策略。

理性的參賽者是賽局理論的主要假設，在考慮對手策略下，尋求最大報酬的策略。賽局理論的基本三大元素：

1. 參賽者(Player)：依人數可分兩人賽局(two persons game)與 N 人賽局(N persons game)，參賽者的策略受到對手的影響，對手為一人或多人。
2. 策略(strategy)：參賽者可採行的行動，根據可得的訊息，作出最佳的策略，可為單一策略，即策略發生機率為 1。或為混合策略，將各種策略給予不同機率加以組合。行為策略則是在賽局過程中可有所調整。

3. 報酬函數(payoff function)：參賽者策略交鋒的不同結果(outcome)所對應的報酬。

賽局可依據不同性質分類如下

1. 參賽者是否協議：合作賽局(cooperative game)、非合作賽局(noncooperative game)。

   合作賽局為所有參賽者對策略進行談判，最佳策略選擇為遵守協議。當參賽者無事前約定，分別尋找最佳策略即為非合作賽局。

2. 依報酬分類：零合、非零合賽局。

   參賽者的報償總合為 0，贏家獲得正報酬，輸家獲得負報酬。反之為非零合賽局。

3. 參賽者互動：靜態、動態賽局。

   靜態賽局即當賽局開始，參賽者皆同時出招，隨即比賽終止。動態賽局則為參賽者有先後出招之分，可依據對手的策略進行調整。

賽局理論的均衡點計算可根據不同型態的賽局與參賽者可獲得的訊息，有其對應均衡概念，分別有奈許均衡、貝氏奈許均衡、子賽局完美均衡、完美貝氏奈許均衡。

本論文將應用完全訊息且靜態的兩人零合賽局來描述市場投資人行為，以及小中取大準則作為選定策略之依據，則混合策略的線性規劃表示式如下：

Strategy		Player 2				Maxmin
		1	2	···	m	
Player 1	1	a_{11}	a_{12}	···	a_{1m}	x_1
	2	a_{21}	a_{22}	···	a_{2m}	x_2
	⋮	⋮	⋮	···	⋮	
	n	a_{n1}	a_{n2}	···	a_{nm}	x_n
Minmax		y_1	y_2		y_m	

以 a_{ij} 表示 Player 1 以 i 策略與 Player 2 的 j 策略相對應的報酬，x_i 表 Player 1 將取策略 i 的機率，y_j 表示 Player 2 採取策略 j 的機率，則 Player 1 採用小中取大準則，且 Player 2 採用大中取小準則的兩個線性規劃表示法如下：

Player 1

$$
\begin{aligned}
\max\ & v \\
\text{s.t..}\ & a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n \geq v \\
& a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n \geq v \\
& \qquad\qquad \vdots \\
& a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n \geq v \\
& x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., \text{n}
\end{aligned}
$$

Player 2

$$
\begin{aligned}
\min\ & v \\
\text{s.t.}\ & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1m}y_m \leq v \\
& a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2m}y_m \leq v \\
& \qquad\qquad \vdots \\
& a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nm}y_m \leq v \\
& y_1 + y_2 + \cdots + y_m = 1 \\
& y_j \geq 0, j = 1, 2, ..., m
\end{aligned}
$$

在選擇權市場上，投資人尋求套利機會，如同參賽者欲找出最佳行動策略，以獲得報酬。有許多學者結合選擇權與賽局理論，不僅考慮該商品是否值得購買，該何時履約，同時將其他參賽者行為是否影響投資人利益一併考慮在內。Steven (2000) 描述兩公司是否該投資同一商品，當領導者(leader)率先投資可得

利益$L(X)-K$，跟隨者(follower)跟進投資該商品可獲得利益$F(X)$，若標的資產價格為X，履約價K，存在誘發投資人成為跟隨者的標的價格X_F，與領導者的價格X_L，其關係如下：

(1) $L(X)-K<F(X), X<X_L$

(2) $L(X)-K=F(X), X=X_L$

(3) $L(X)-K>F(X), X_L<X<X_F$

(4) $L(X)-K=F(X), X\geq X_F$

此外，若雙方同時選擇進入，則可獲得$S(X)-K$，則可獲得的利益如下式：

$$S(X)-K<\min\left[L(X)-K, F(X)\right], X<X_F$$

$$S(X)-K=L(X)-K=F(X), \qquad X\geq X_F$$

因此可利用觀測到的標的價格，決定投資人面對實質選擇權該何時進入市場履約，此概念也可應用於美式選擇權，其可提前履約的特性，使得在討論定價時有一定的複雜性，但可由觀測的價格，決定是否該履約或等待。

Prasada 與 Somesh (2001)提出具交易成本之市場下，將時間切割為離散點，以自我融資的方式避險，可建構出美式選擇權的無套利區間，而區間的上界同時為避險上界，此外，延伸出以兩人賽局的均衡點來解出美式選擇權的上界。

首先，以賣方的觀點，賣出價格a的美式選擇權，由收入a元，建構自我融資的投資組合$(\Delta, B)\in\Phi(a)$，Δ與B分別為股票與無風險基金的持有部位，Φ為自我融資投資組合(Δ, B)的集合，以此投資組合作避險動作，以下式表示

$$V_\tau^{a,\Delta,B}\geq A_\tau, \forall\tau\in T$$

其中A_τ為美式選擇權於時間τ的價格，賣方藉由投資組合的價值$V^{(a,\Delta,B)}$為此美式選擇權作完全避險，且以最小起始投資金額作避險投資組合，因此可得到避險上限

$$h_{up}(\lambda,\mu)=\min\left\{a\geq 0 \,\middle|\, \exists(\Delta,B)\in\Phi(x) \text{ s.t. } V_\tau^{a,\Delta,B}\geq A_\tau, \forall\tau\in T\right\} \tag{3}$$

並定義 $D_t^{a,\Delta,B}=(A_t-V_t^{a,\Delta,B})r^{-t}$ 為避險誤差的折現。

同樣的，對買方而言，必須針對買進的美式選擇權作避險投資組合，買方借貸 a 元，在時間 $t=0$，向賣方購買選擇權，建構投資組合 $(\Delta,B)\in\Phi(-a)$，

$$V_\tau^{-a,\Delta,B}+A_\tau\geq 0$$

$$h_{low}=\max\left\{a\geq 0\,\middle|\,\exists(\Delta,B)\in\Phi(-x)\ \text{ s.t. } V_\tau^{-a,\Delta,B}+A_\tau\geq 0,\forall\tau\in T\right\}\tag{4}$$

根據(3)與(4)，即可推導出美式選擇權的合理價格區間為

$$V_\tau^{-a,\Delta,B}\leq A_\tau\leq V_\tau^{a,\Delta,B}$$

避險上限可有多種表示方法，在此列舉三種

1. $h(Q(\lambda,\mu))=\max\limits_{q\in Q(\lambda,\mu)}A_q$，$q$ 表示在事件樹中，各點履約的機率，美式選擇權機率 q 下的最大利潤，買賣標的資產所收取的手續費比率分別為 λ 與 μ。
2. $h(Q,\Phi)=\max\limits_{q\in Q}\min\limits_{(a,\Delta,B)\in\Phi}(a+D_q^{a,\Delta,B})$，以賣方的觀點，目標為最小起始投資金額與誤差，在機率測度 q 下的最大值。
3. $h(\overline{T},\Phi)=\max\limits_{\sigma\in\overline{T}}\min\limits_{(a,\Delta,B)\in\Phi}(a+D_\sigma^{a,\Delta,B})$，最佳避險在混合履約時間策略下的最大值，令 σ 表示履約時間的混合策略。

根據第二種與第三種避險上限的表示式，分別以賽局理論來描述之，建立兩人賽局，參賽者為賣方與一虛擬者，賣方目標為最小花費，相對於虛擬者希望選擇具最大效用之策略：

1. 賣方可建立投資組合 $(a,\Delta,\mathrm{B})\in\Phi$，虛擬者的策略為美式選擇權事件樹中每一點的發生履約的機率 q，$q\in Q$，則此賽局之均衡值為 $a+\overline{D}_q^{a,\delta,B}$。
2. 賣方策略為自我融資投資組合 $(a,\Delta,\mathrm{B})\in\Phi$，虛擬者的策略為履約時間的混合策略 σ，$\sigma\in\overline{T}$，$\overline{T}$ 為混合履約時間的集合，此賽局賣方的花費與虛擬者的效用皆為 $a+D_\sigma^{a,\delta,B}$。

上述兩賽局的均衡值皆等於避險上界 $h_{up}(\lambda,\mu)$ ，利用相同的方法計算出避險下界，形成無套利區間。

因此如何由市場上所觀測的價格，導出風險中立機率測度，已成為重要的研究方向，故越來越多的學者，利用市場成交價格建構套利模型，在無套利機會下，還原風險中立機率測度，而本論文提出利用觀測的買價與賣價，以賽局理論的模型建構套利的投資組合，據以還原隱含於市場價格的風險中立測度。