# 第三章 由選擇權市場價格還原風險中立機率測度

本章將以賽局理論的觀點，建構一兩人零合競賽，參賽者為投資人與市場機制，描述投資人由可觀測的多檔買權與賣權的買價與賣價，對未來標的資產價格的不確定性，如何建構具套利機會的投資組合。在市場沒有套利機會時，利用此模型對偶問題的線性規劃，可還原隱藏於符合市場價格的風險中立機率測度，此機率測度可用來計算衍生性商品的公正價格。

## 3.1 選擇權套利模型

投資人面對同一標的資產且相同到期日，但履約價格相異的買權與賣權，皆可以市場的買價與賣價進行交易，建構各式投資組合以尋求利潤或者避險。假設投資人面對市場$n$檔的買權與賣權，其中$K_i$為對應之買權與賣權的履約價，依履約價由低至高依序排列，買權賣價$c_i^a$，買權買價$c_i^b$，賣權賣價$p_i^a$，賣權買價$p_i^b, i=1,2,...,n$，針對$2n$檔選擇權買進賣出，建構到期日獲利最大的投資組合。

首先，根據市場的實際交易情形，本模型給定以下假設：

1. 交易之選擇權為歐式選擇權。
2. 選擇權的市場價格公開，價格無法人為操縱。
3. 選擇權之到期日皆相同。
4. 考慮單期狀況，即持有選擇權值直到到期日。

當到期日的標的資產價格為$S_T$時，買權到期價值為$(S_T-K_i)^+$，賣權的到期價值為$(K_i-S_T)^+, i=1,2,...,n$，故影響報酬的最大因素為到期日時標的資產價格的高低。在離散時間架構下，考慮未來標的資產可能的價格為離散點且個數有限，假設每個狀態所對應之標的資產價格為$S_j,\ j=1,2,...,m$，由低至高排列，共有$m$種狀態，如圖所示，$t$為觀察時點，$T$為到期日。

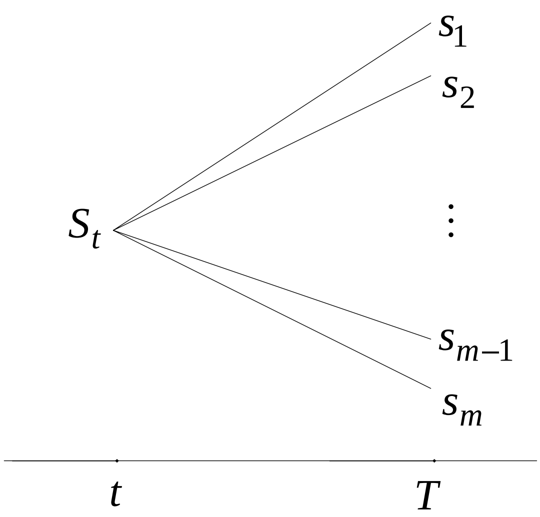


**圖 3.1** 標的資產於時點 $T$ 之 $m$ 個可能到期價格

因此，投資人在到期日標的資產價格未知的情況下，根據市場上觀察到的買價與賣價進行買權與賣權的買賣，希望能建構一組投資組合，使得到期日時獲得最大報酬。

投資人對未來標的資產價格的不可預期，就如同在賽局中參賽者無法預測對手會採取何種策略，但可依各自不同的策略，計算出相對應的報酬，找出應採取之最佳策略。依此性質，建構一賽局描述市場投資人的行為。並假設另一參賽者稱為市場機制，其策略為未來可能的標的資產價格。在此賽局中，某一方的獲利，為另一方的損失，稱此賽局為零合賽局。

賽局形成的三元素：參賽者、策略、報酬，在本模型中，我們給予以下的定義：

1. 參賽者—投資人與市場機制

2. 策略—投資人的策略為多檔的買權與賣權的買賣行為，市場機制的策略為不同的標的資產價格 $S_j,\ j=1,2,...,m$

3. 報酬—參賽者對應的不同策略所對應而產生對於投資人的報酬

首先，投資人欲於市場上做買進與賣出，必須對成交價格同意時，交易才成立。所以，當買進買權或賣權時，需支付當時市場上觀測的賣價，賣出買權或賣權時，

可獲得買價金額。 例如：投資人賣出一口買權$i$，履約價為$K_i$，到期日標的資產價格$S_j$，其市場買價為$c_i^b$，當交易成立，表示投資人接受市場買價價格，則收入買價金額，此投資組合的到期利潤折現值為

$$c_i^b - e^{-r\tau}(S_j - K_i)^+$$

投資人對於$2n$檔選擇權分別做買進或賣出的行動，共有$4n$種不同的行動，對於履約價為$K_i$的買權，可以用$c_i^a$買入或以$c_i^b$賣出，對於$K_i$的賣權可以用$p_i^a$買入或以$p_i^b$賣出，對應於市場機是表現的$S_j$狀態，$j = 1, 2, ..., m$，所產生的報酬如下表：

**表一** 投資人套利機會報酬表

| 選擇權買賣價 | 資產價格為$S_j$的報酬 |
|---|---|
| $c_i^a$ | $e^{-r\tau}(S_j - K_i)^+ - c_i^a$ |
| $c_i^b$ | $c_i^b - e^{-r\tau}(S_j - K_i)^+$ |
| $p_i^a$ | $e^{-r\tau}(K_i - S_j)^+ - p_i^a$ |
| $p_i^b$ | $p_i^b - e^{-r\tau}(K_i - S_j)^+$ |

其中

$c_i^a, i = 1, 2, ..., n$ 時點$t$的買權賣價

$c_i^b, i = 1, 2, ..., n$ 時點$t$的買權買價

$p_i^a, i = 1, 2, ..., n$ 時點$t$的賣權賣權

$p_i^b, i = 1, 2, ..., n$ 時點$t$的賣權買價

$K_i, i = 1, 2, ..., n$ 第$i$檔買權及賣權的履約價

$r$ : 無風險利率(以年為單位計算之)

$\tau$:距離到期日的時間$\tau = T - t$(以年為單位計算之)

假設投資人的出招策略採用小中取大方案(Maxmin)評估原則,即最大化可能的最小報酬，相對的對手則採用大中取小(Minimax)評估原則，即最小化可能的最大損失。此賽局中的最佳解可能非單純策略，而是針對參賽者的各種可能策略，給予適當的機率，所形成的混合策略。

針對投資人的混合策略,我們定義$x_i^a, x_i^b, y_i^a, y_i^b$為對應$c_i^a, c_i^b, p_i^a, p_i^b$策略的機率，其中$0 \le x_i^a, x_i^b, y_i^a, y_i^b \le 1,\ i = 1, 2, ..., n$，且機率和為1。因此投資人這方依據表一的報酬表，尋找最佳混合策略的線性規劃為：

**(模型一)**

$$\max\ v$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{n}\left\{[e^{-r\tau}(S_j - K_i)^+ - c_i^a]x_i^a + [c_i^b - e^{-r\tau}(S_j - K_i)^+]x_i^b\right\} +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{[e^{-r\tau}(K_i - S_j)^+ - p_i^a]y_i^a + [p_i^a - e^{-r\tau}(K_i - S_j)^+]y_i^b\right\} \ge v,\ j = 1, 2, ..., m$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^a + x_i^b + y_i^a + y_i^b) = 1$$

$$x_i^a, x_i^b, y_i^a, y_i^b \ge 0, i = 1, 2, ..., n$$

同樣的，對另一方參賽者−市場機制而言，若對應於不同標的資產價格$S_j$的機率為$z_j, j = 1, 2, ..., m, 0 \le z_j \le 1$，且$\sum_{j=1}^{m} z_j = 1$，依據表一的報酬表，市場機制尋找的最佳混合策略的線性規劃如下:

$$\min\ v$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{m}[e^{-r\tau}(S_j-K_i)^{+}-c_i^{a}]\,z_j \le v,\ i=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{m}[c_i^{b}-e^{-r\tau}(S_j-K_i)^{+}]\,z_j \le v,\ i=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{m}[e^{-r\tau}(K_i-S_j)^{+}-p_i^{a}]\,z_j \le v,\ i=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{m}[p_i^{b}-e^{-r\tau}(K_i-S_j)^{+}]\,z_j \le v,\ i=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{m}z_j=1$$

$$z_j\ge 0,\ \ j=1,2,\dots,m,$$

投資人對其資產的配置係以追求最高的報酬率為目標，對於深度價內的買權與賣權而言，所支付的權利金相對於價平或價外的買權與賣權差距非常大，因此將表一的實際報酬轉成以報酬率表示(如表二)，才能反應不同履約價 $K_i$ 的買權與賣權在投資人資產配置上不同的重要性。因此前述賽局雙方的線性規劃模型，依據表二的報酬表，可改寫如模型二：

**表二** 投資人報酬率表

| 選擇權買賣價 | 資產價格為 $S_j$ 的報酬 |
|---|---|
| $c_i^a$ | $[e^{-r\tau}(S_j-K_i)^{+}-c_i^{a}]/c_i^{a}$ |
| $c_i^b$ | $[c_i^{b}-e^{-r\tau}(S_j-K_i)^{+}]/c_i^{b}$ |
| $p_i^a$ | $[e^{-r\tau}(K_i-S_j)^{+}-p_i^{a}]/p_i^{a}$ |
| $p_i^b$ | $[p_i^{b}-e^{-r\tau}(K_i-S_j)^{+}]/p_i^{b}$ |

**(模型二)**

投資人的套利模型：

$$\max \ v'$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n}\left\{[e^{-r\tau}(S_j-K_i)^+ - c_i^a]/c_i^a\right\}x_i^a + \left\{[c_i^b - e^{-r\tau}(S_j-K_i)^+]/c_i^b\right\}x_i^b +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{[e^{-r\tau}(K_i-S_j)^+ - p_i^a]/p_i^a\right\}y_i^a + \left\{[p_i^b - e^{-r\tau}(K_i-S_j)^+]/p_i^b\right\}y_i^b \ge v'$$

$$j = 1, 2, ..., m$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^a + x_i^b + y_i^a + y_i^b = 1$$

$$x_i^a, x_i^b, y_i^a, y_i^b \ge 0, \ i = 1, 2, ..., n$$

市場機制的套利模型:

$$\min \ v'$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{m}\left\{[e^{-r\tau}(S_j-K_i)^+ - c_i^a]/c_i^a\right\}z_j \le v', i = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{[c_i^b - e^{-r\tau}(S_j-K_i)^+]/c_i^b\right\}z_j \le v', i = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{[e^{-r\tau}(K_i-S_j)^+ - p_i^a]/p_i^a\right\}z_j \le v', i = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{[p_i^b - e^{-r\tau}(K_i-S_j)^+]/p_i^b\right\}z_j \le v', i = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{j=1}^{m} z_j = 1$$

$$z_j \ge 0, \ j = 1, 2, ..., m$$

上述兩線性規劃模型，即是我們從賽局觀點所建立的選擇權套利模型。當 $v' \geq 0$，投資人可由該項投資組合獲利，表示所觀測到的一系列選擇權的市場價格存在有買價過高或賣價過低的情形，產生套利的機會。

## 3.2 還原風險中立機率測度

當市場無套利機會時，必存在一組風險中立機率測度 $Q$，根據資產價格的平賭性質，買權與賣權的合理價格，應為

$$c_i = e^{-r\tau} E^Q (S_T - K_i)^+$$

$$p_i = e^{-r\tau} E^Q (K_i - S_T)^+$$

投資人利用模型二所建構的投資組合，到期日所獲得之報酬，其報酬率為 $v'$。當市場無套利機會時，兩參賽者的目標函數必為0，即投資人這方無論期初投資多少金額，到期日不會有超額報酬，此時對另一參賽者市場機制而言亦為無損失。

首先，當 $v' = 0$ 時，可得模型二中市場機制套利模型的限制式滿足下式：

$$\sum_{j=1}^{m} \left\{ [e^{-r\tau} (S_j - K_i)^+ - c_i^a] / c_i^a \right\} z_j \leq 0 \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left\{ [c_i^b - e^{-r\tau} (S_j - K_i)^+] / c_i^b \right\} z_j \leq 0 \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left\{ [e^{-r\tau} (K_i - S_j)^+ - p_i^a] / p_i^a \right\} z_j \leq 0 \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left\{ [p_i^b - e^{-r\tau} (K_i - S_j)^+] / p_i^b \right\} z_j \leq 0 \tag{8}$$

由(5)、(6)兩式可推出:

$$e^{-r\tau} \sum_{j=1}^{m} (S_j - K_i)^+ z_j - c_i^a \leq 0$$

$$c_i^b - e^{-r\tau}\sum_{j=1}^{m}(S_j - K_i)^+ z_j \le 0$$

故可得買權的無套利區間為

$$c_i^b \le e^{-r\tau}\sum_{j=1}^{m}(S_j - K_i)^+ z_j \le c_i^a \tag{9}$$

同理，由(7)、(8)兩式，可推賣權的無套利區間為

$$p_i^b \le e^{-r\tau}\sum_{j=1}^{m}(K_i - S_j)^+ z_j \le p_i^a \tag{10}$$

因 $z_j \ge 0, j = 1, 2, ..., m$ ，且 $\sum_{j=1}^{m} z_j = 1$ ，所以 $(z_1, z_2, ..., z_m)$ 可視為一個機率分配，若令 $Q = (z_1, z_2, ..., z_m)$ ，則式(9)與式(10)即可表示成

$$c_i^b \le e^{-r\tau}E^Q(S_T - K_i)^+ \le c_i^a$$

$$p_i^b \le e^{-r\tau}E^Q(K_i - S_T)^+ \le p_i^a$$

將其視為買權與賣權的無套利區間，合理的選擇權價格應高於買價且低於賣價，當買價過高或賣價偏低的情況發生時，則存在套利機會。而在本模型中，可藉由市場機制所採取的混合策略之機率，作為風險中立機率測度，依此計算選擇權的合理價格。

## 3.3 考慮交易成本

為精確的描寫市場實際狀況，考慮實際的交易過程中，投資人在進行選擇權的買賣時，除須支付或收取權利金的買價與賣價外，還需支付相關的交易費用，在此考慮的交易成本包含手續費與稅金。手續費 $h$ 為一常數，以一口為單位，當投資人買進或賣出一口，則須支付 $h$ 元。稅金的收取按每次的成交金額課徵，為單邊各收取一定比例 $d$。考慮交易成本後的投資人報酬如表三，依據表三的報酬表，參賽者雙方的套利模型如下：

表三 投資人報酬率(考慮交易成本)

| 選擇權買賣價 | 資產價格為 $S_j$ 的報酬 |
|---|---|
| $c_i^a$ | $[e^{-r\tau}(S_j - K_i)^+ - (1+d)c_i^a - h]/[(1+d)c_i^a + h]$ |
| $c_i^b$ | $[(1-d)c_i^b - h - e^{-r\tau}(S_j - K_i)^+]/[(1-d)c_i^b - h]$ |
| $p_i^a$ | $[e^{-r\tau}(K_i - S_j)^+ - (1+d)p_i^a - h]/[(1+d)p_i^a + h]$ |
| $p_i^b$ | $[(1-d)p_i^b - h - e^{-r\tau}(K_i - S_j)^+]/[(1-d)p_i^b - h]$ |

**(模型三)**

投資人的套利模型：

$$\max w$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} \left\{[e^{-r\tau}(S_j - K_i)^+ - (1+d)c_i^a - h]/[(1+d)c_i^a + h]\right\} x_i^a +$$

$$\left\{[(1-d)c_i^b - h - e^{-r\tau}(S_j - K_i)^+]/[(1-d)c_i^b - h]\right\} x_i^b +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{[e^{-r\tau}(K_i - S_j)^+ - (1+d)p_i^a - h]/[(1+d)p_i^a + h]\right\} y_i^a +$$

$$\left\{[(1-d)p_i^b - h - e^{-r\tau}(K_i - S_j)^+]/[(1-d)p_i^b - h]\right\} y_i^b \geq w \text{ , } j = 1, 2, ..., m$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^a + x_i^b + y_i^a + y_i^b) = 1$$

$$x_i^a, x_i^b, y_i^a, y_i^b \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n$$

市場機制的套利模型:

$$\min\ w$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{m}\left\{[e^{-r\tau}(S_j-K_i)^+-(1+d)c_i^a-h]/[(1+d)c_i^a+h]\right\}z_j\le w,\ i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{[(1-d)c_i^b-h-e^{-r\tau}(S_j-K_i)^+]/[(1-d)c_i^b-h]\right\}z_j\le w,\ i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{[e^{-r\tau}(K_i-S_j)^+-(1+d)p_i^a-h]/[(1+d)p_i^a+h]\right\}z_j\le w,\ i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{[(1-d)p_i^b-h-e^{-r\tau}(K_i-S_j)^+]/[(1-d)p_i^b-h]\right\}z_j\le w,\ i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m}z_j=1$$

$$z_j\ge 0,\ j=1,2,\ldots,m$$

同樣的，在模型三中，我們可以找出具套利機會的買權與賣權，在市場無套利機會時，$w=0$，即可還原出隱含於價格中的風險中立機率測度，與買權及賣權的合理價格區間：

$$(1-d)c_i^b-h\le\sum_{j=1}^{m}e^{-r\tau}(S_j-K_i)^+z_j\le(1+d)c_i^a+h$$

$$(1-d)p_i^b-h\le\sum_{j=1}^{m}e^{-r\tau}(K_i-S_j)^+z_j\le(1+d)p_i^a+h$$

本論文所提出的模型，不需對波動度做任何的假設，還可根據每筆市場資訊，檢視是否存在套利機會。在無套利機會存在時，可藉由市場機制的套利模型，導出合理的選擇權價格區間，並得到隱含於市場價格的風險中立機率測度恰為市場機制所採取的混合策略機率。