

6 結論與建議

本研究的主要目的在探討高一學生於「複數與複數平面」單元教學後，其解題情形、錯誤類型、迷思概念及造成學生犯錯的原因。並實施補救教學，探討補救教學的成效，且進一步將研究的結果整理歸納，提出建議以提供教師及未來研究者參考。

研究方法是研究者在收集相關文獻資料之後，經過兩次預試，多次與專家討論，並經過數度修改，完成之「複數與複數平面單元解題測驗卷」，並以此試卷對北區二所高中(一所國立、一所縣立)三個班級共125名學生實施測驗。以學生作答情形並參考資深數學教師的實際教學經驗，以統計、分析、歸納學生在「複數與複數平面」單元的解題錯誤類型，及發生錯誤的原因。研究者再針對這些錯誤類型及原因，設計補救教學活動，對其中研究者任教學校的二個班級實施補救教學，並分析補救教學的成效，包括空白率、答對率的改變情形，同時分析補救教學成效的保留情形。

6.1 結論

6.1.1 解題錯誤類型

由第四章的分析可知高一學生「複數與複數平面」單元解題的主要錯誤類型有以下11種：

- (1)對「複數」的定義了解不清：由於是新的觀念，高一的學生一時無法把定義弄清楚，產生一些誤解。包括：實部與虛部不清、不具「虛數無大小」概念、不會利用二複數相等性質、不清楚 i 的性質及「複數」與「負數」混淆。
- (2)不知二根式乘、除的運算規則：受國中根式運算影響，以為二根式乘、除，即是將根號內二數直接相乘、除，未考慮根號內的數均需為正數。
- (3)不熟悉 i 的 n 次方或不具「級數」觀念，無法順利利用 i 乘冪的特殊性質：少部分學生不知道「 $i^2=-1$ 」，所以也不知道「 $i^3=-i$ 」及「 $i^4=1$ 」。另外，

因為尚未教授「等比級數」單元，所以學生不具「級數」觀念。這二個因素造成學生無法順利利用 i 乘冪的特殊性質。

- (4)作複數的四則運算時易發生錯誤：將二複數相加、減時，需要將實部、虛部分開計算，也要注意變號。將二複數相乘時，需依分配律展開，展開時需注意變號，且需將 i^2 化爲-1。將二複數相除時，需將分子、分母同乘分母的共軛複數，以便將分母有理化…。因為需要同時注意數個地方，因此發生錯誤的機會大增。
- (5)不知複數絕對值的意義，或觀念仍停留在國中「負的變正的，正的還是正的」的錯誤觀念：即使是實數，其絕對值的定義應為該數在實數軸上的點與原點的距離，與學生的認知不同。因為學生實數絕對值的錯誤觀念，造成複數絕對值學習的困難。
- (6)不清楚共軛複數的定義或共軛複數與複數絕對值產生混淆：高一學生並不熟悉共軛複數符號，又因為共軛複數是將複數的虛部變號，與學生國中時「負的變正的，正的還是正的」的觀念，易產生混淆。
- (7)不會利用複數絕對值的運算性質：複數絕對值的運算性質，可以幫助解題者快速且正確地獲得答案。學生因為不熟悉這些性質，遇到問題時便以直覺的方式作答，由於計算較為繁複，經常計算錯誤。
- (8)無法將複數正確地對應到複數平面上：將實部視為 x 座標，虛部視為 y 座標，便能將複數對應到複數平面。常有對應錯誤的情形，可能是一時疏忽，多練習應可改善。如果學生不具此項能力，無法將複數與平面幾何結合，便會影響後續的學習。
- (9)平面幾何能力不足：部份學生可以將複數對應到複數平面上，但卻無法解決後續的平面幾何問題，顯見先備知識不足，影響單元學習甚巨。
- (10)尚未建立複數概念：解方程式時，無共軛複根概念。
- (11)習慣以整數思考：學生仍習慣以整數思考，少考慮到有理數或實數。

6.1.2 解題錯誤的原因

針對學生錯誤的答題內容，可將錯誤的原因歸納如下：

- (1)定義不清，似是而非：定義的目的是確定一個概念的意義，使概念有一

明確、清楚的意涵，是學習某單元知識的基石。高一學生對複數的定義不清有以下因素：

<1>學生在根式觀念薄弱的情形下，難以接受 $i = \sqrt{-1}$ ， $i^2 = -1$ 。

<2>將複數區分為「實部」與「虛部」，與其對「一個數」的認知，產生衝突。

<3>對絕對值的認知，受實數絕對值的結果影響甚深。

(2)受直觀影響，產生錯誤類推：研究時，發現許多錯誤是學生在未經證實的情況下，將自己直覺的想法加以運用。例如： $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$ 、

$$|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|, \frac{a+bi}{c+di} = e+fi \text{ 得 } \frac{a}{c} = e \text{ 及 } \frac{b}{d} = f。$$

(3)無法將複數與複數平面連結：學生大多能將複數對應到複數平面上，但在觀念上，仍然無法將二者連結。例如：複數的絕對值即是對應到複數平面上的點與原點的距離、 $|P-Q|$ 代表二複數 P 、 Q 在複數平面上的距離、複數平面上滿足 $|Z|=1$ 的複數不僅是 1 與 -1 而已。

(4)先備知識不足：許多錯誤是因為先備知識不足造成的。例如：依分配律展開的過程極易發生錯誤、解二元一次聯立方程組錯誤、級數觀念不足、不知根與係數性質、不會求三角形面積、不會求平面上二點的距離。這些都是降低單元學習成效的重要因素。

6.1.3 補救教學活動成效

由第五章補救教學活動的成效分析，可得下列幾點結論：

(1)空白率下降：大部份試題空白率均有下降，其中有5題達10%以上。空白率不論由整體或試題個別做檢定，均呈現明顯下降。經過補救教學後，學生不會寫的題目變少，又因為作答速度變快有較多的時間思考其他的試題。

(2)答對率提昇：

<1>以整體學生來看：大部分試題答對率均上升，其中 4 題答對率上升達 40% 以上。另一方面，大部分學生的答對題數都是增加的，甚至有增加 10 題以上。答對率不論由試題或學生個別做檢定，均呈現明顯上升。

<2>以高、低分組來看：無論是高分組或低分組學生答對率明顯上升。

<3>針對低分組而言：低分組學生前測時，作答較差的試題(指答對率低於 50%)共有 15 題，經補救教學後，每一題的答對率均上升，有 9 題上升 30% 以上。以 McNemar 作檢定，其中 11 題成效顯著，4 題成效不顯著。低分組 27 位學生中，後測答對率上升有 25 位，持平 1 位，下降 1 位，其中 9 位後測答對率達 80% 以上。可見補救教學對低分組的學生成效是顯著的。

(3)保留效果良好：

<1>以整體學生來看：全體學生後測與延後測答對題數差異以 Z 檢定，並沒有顯著差異。兩者相關係數 $R=0.892$ ，顯示為高度正相關。可見補救教學的成效經過了一個月左右，全體學生的學習保留得很好。

<2>針對低分組而言：每一題後測及延後測的 McNemar Test P 值均大於 0.05，顯示答題情形差異不大。可見補救教學的成效經過了一個月左右，低分組學生的學習保留得很好。依個人而言，延後測答對率比後測答對率上升有 18 位，持平 5 位，下降 4 位。這 4 位學生中，2 位下降 5%，2 位下降 10%，其後測、延後測答題檢定差異並不顯著。

(4)補救教學提高學生的學習興趣：由學生填寫「補救教學活動課後意見調查表」，可以發現：學生普遍認為以 PowerPoint & GSP 為工具的補救教學，學習內容與教材更能吸引學生的注意，增進學生的學習成效，因此學生對這次的補救教學大多抱持著正面的看法。

6.2 檢討

研究者於研究過程中，發生若干缺失在此檢討：

(1)限於人力、物力，研究的樣本為北區國立高中一班及縣立高中二班，未

能涵蓋其他地區。且僅對其中研究者任教學校的二班，進行補救教學，研究樣本來源不夠普及，所以不宜將本研究結果作過度推論。

(2)由於訪談的時間及地點不易安排，使得研究者訪談時較為心急。加上研究者訪談經驗不足，未受過專業訪談的訓練。有時未能確實掌握學生的想法，反而在發問時，以自己的思考模式作了過度的提示，有引導學生回答的現象。例如：

T：請問你知道這一題錯在哪裡嗎？

S：就這個是嗎？

T：這個是什麼？

S： $2i$ 乘 3。

T： $2i$ 乘 3 等於 $6i$ 。

S：嗯！

T：然後，後面應該是…

S： $-4 \cdots +4$ ？

T：一開始是 $-4i^2$ 。

S：嗯！

T：然後等於 $+4$ 喔？

S：嗯！

T：所以是展開的時候…

S：算錯了。

T：其實是有一個公式的，請問有沒有 $(a+b)(a-b)$ 這個公式？

S：嗯！

T：叫做平方差，他等於 $a^2 - b^2$ 。

另一方面，雖經婉轉告知因研究需要，需將訪談過程錄音。造成部份學生對訪談稍有恐懼，以致詞不達意，或過於口語化。以上是研究者於訪談方面，需要改善的地方。

- (3)由於學生課業壓力大，課程緊湊，補救教學時間不易安排。僅以2小時實施補救教學，由學生反應得知：「這個教學讓我會解一些複數題目，但上得有點快」。另外，補救教學的缺失有：「我覺得字體太小，坐在後面看的很吃力」、「背景的顏色有些很深，字會看不清楚」。這些都是研究者以後實施補救教學時，需要注意的地方。
- (4)少數程度較差學生，由於先備知識嚴重不足，對補救教學活動感到吃力，學習成效也較不明顯。研究者應於補救教學活動前，找時間給予特別指導，以增進其先備能力。

6.3 建議

根據本研究的過程及結論，在教材與教學及未來研究上提出以下建議：

6.3.1 教學與教材方面的建議

- (1)實施「九年一貫課程」，可以避免國中、小間課程的落差，但也同時產生國、高中課程銜接的問題，有關單位應重視國、高中數學課程的銜接。以根式為例：高一學生的數系觀念大多停留在有理數，雖然國中時曾經介紹過根式，但所佔篇幅極小。學生僅知道：面積為2的正方形，邊長為 $\sqrt{2}$ 、由計算機可知 $\sqrt{2}$ 大約為1.414、 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ 。對根式僅有如此的認知，將嚴重影響高中數學的學習，由本研究可以確知對「複數與複數平面」單元的學習確有影響。數學的學習是環環相扣且需要時間內化的，僅提供高一20節的課程銜接經費，其效果相當有限。
- (2)「複數與複數平面」單元，其內容包含根式的運算、數系的觀念、平面幾何的知識，是高中三年數學的基礎，如果本單元學習成效不彰，將造成往後學習的困擾。本研究顯示：如果學生本單元教學後，產生觀念不清或錯誤概念時，教師針對其主要的錯誤類型設計教材，實施圖解式的補救教學，學生的錯誤迷思將獲得相當程度的改善。

- (3)結合 PowerPoint & GSP 的電腦輔助教學可以提高學生的學習興趣，對數學抽象概念無法理解的學生，透過動態情境設計，讓學生看得到具體概念的呈現，可以幫助其理解。但實施時，不可只重視聲光效果，應注意整體畫面的呈現。至於設計教學檔案需耗費非常多時間的問題，可透過教師間的分工或與出版商合作的方式解決。
- (4)學生學習「複數與複數平面」單元時，常因直觀產生不當的推論，造成解題錯誤。教師於教授本單元時，需注意這方面的問題。應具耐心，多舉反例，以糾正學生的錯誤推論。

6.3.2 未來研究方面的建議

- (1)本研究僅針對「複數與複數平面」作討論，配合三角函數後，複數可以極式表示，可用來解複數的 n 次方根。限於人力及時間，均未討論，有待後續之研究。
- (2)計算能力薄弱，經常計算錯誤，及先備知識不足，影響解題情況嚴重。若於教學時，能依據本研究所列常犯的錯誤及所需的先備知識，於教學時特別提醒或予以加強，則其學習成效是否能有所改善？所犯錯誤是否減少？值得後續研究者討論。
- (3)將電腦融入教學，結合 PowerPoint & GSP 為工具的補救教學活動，對本單元的學習成效具提昇效果，學生也多持正面評價。如果能有系統地開發以 PowerPoint & GSP 為主的主題教學模式，應用於其他單元，其成效如何？值得作後續的研究。
- (4)本研究的對象為北區國立高中、縣立高中各一所的三個高一班級，取樣的範圍較小。因此在量的分析上，可能會造成代表性不足的情形。故本研究之結果可否作較大範圍的推論，仍待後續研究者之研究。