

第一章 緒論

第一節 研究動機與目的

近年來隨著利率持續走低，定存所能獲得的利潤幾乎微乎其微。在投資人希望可以找到收益更高的投資產品的情況下，連結不同標的結構行債券越來越受歡迎。如今各種不同計息方式的連動債券如：股價連動債券、利率連動債券已經充斥整個市場。

在衍生性商品日益繁多且複雜而市場上充斥著各種投資人與投機份子的情況下。為了避免「套利」的情況發生，發行商對各種產品的設計均非常小心謹慎。對發行商來說，如何「正確」的評價與之後的避險動作顯的相當重要。而對於投資人，若能「正確」評估產品的價格，對於投資也是很有幫助。

目前市場上許多結構行商品的報酬型態都相當複雜，一般投資人無法從公開說明書上獲得報酬的完整資訊。以附贖回權利率連動債券為例，投資人若無法判斷(或模擬)利率走勢而貿然購買利率連動債券，將面臨低收益或是被提前贖回而需要再投資等風險。

本論文的研究目的，是希望能以一個正確且有系統的方式，評價利率衍生性商品，從模型的選用、參數校準到最後的模擬與評價，達到理論與實務的結合。本論文藉由「12年期美金計價『利率區間』連動債」與「十年期美元計息滿到期反浮動利率連動債券」兩個利率衍生性商品為例檢測評價的正確性。且兩個商品附有不同條件的贖回條款，藉此讓評價技巧更為完善。

第二節 論文架構

第二章將利率模型與評價方法做一個回顧；第三章則專注於本論文評價所使用的利率模型與評價方法的介紹；第四章以「12 年期美金計價『利率區間』連動債」為例，詳細介紹本文中，數值方法的應用，最後加上敏感度分析；第五章則以「十年期美元計價息滿到期反浮動利率連動債券」為例；第六章為結論。本論文的流程圖如下：



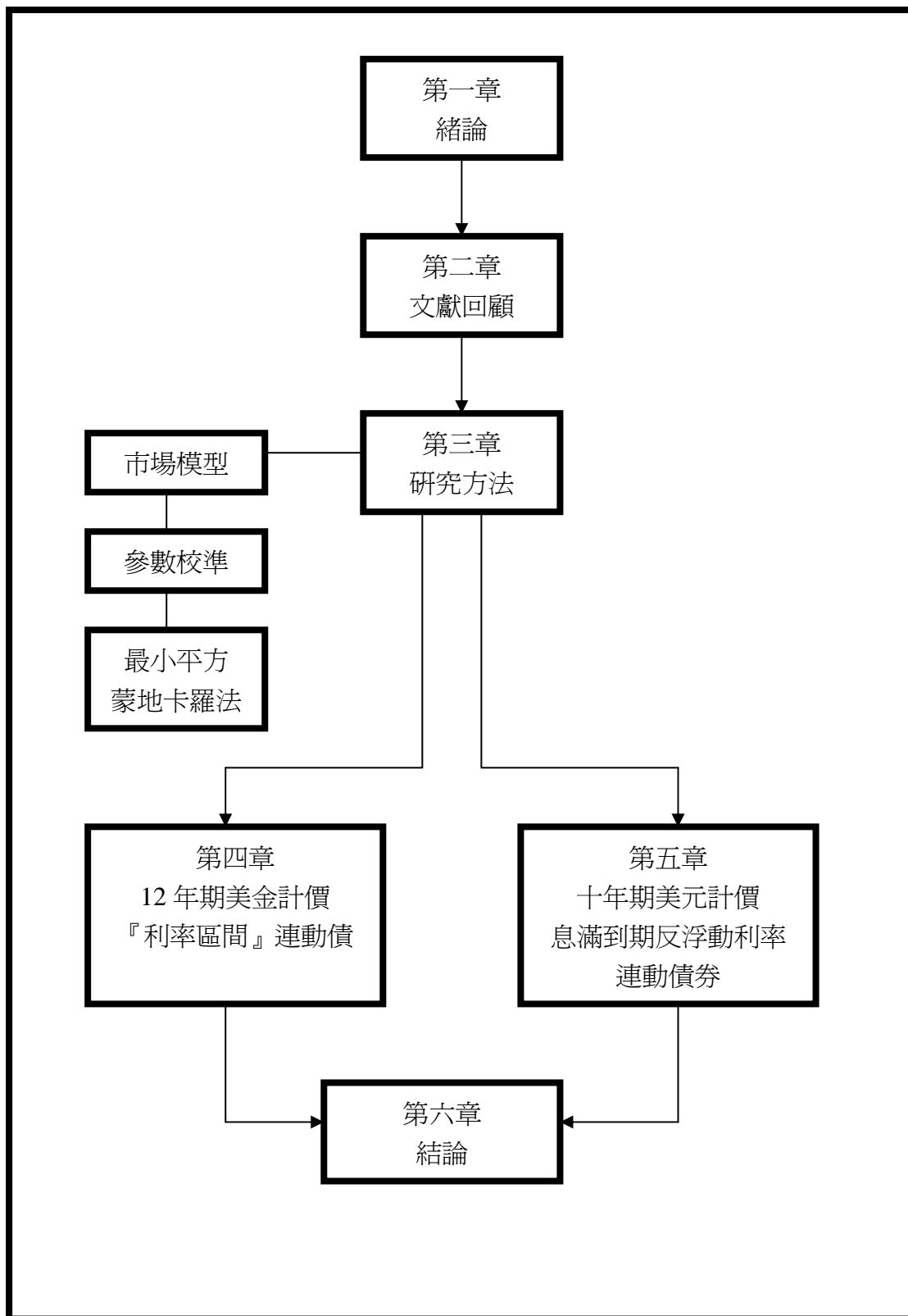


圖 1-1 本文流程圖

第二章 文獻回顧

本文的評價目標為利率衍生性商品，因此本章對利率模型做回顧，並簡單介紹評價方法與數值方法。

隨著利率衍生性商品的多樣化，如何對於利率衍生性商品做評價與避險，是發行者的重要議題。為了能做出正確的評價，利率模型選擇的關鍵，在於何者能準確描述利率行爲。

現行市場中，對於標準的利率衍生性商品，如利率上限選擇權(Cap)、歐式債券選擇權(European Bond Option)、以及歐式利率交換選擇權(European Swaption)，最簡易的評價方法為採用 Black-Scholes 的選擇權評價公式(以下簡稱 BS 公式)。此種作法最無法令人信服的地方在於假設對數常態的對象產生矛盾。當評價利率上限選擇權時，假設利率服從對數常態；而評價歐式利率交換選擇權時，卻又假設交換利率(Swap Rate)服從對數常態。

想求得路徑相依的衍生性金融商品的封閉解是很困難的，因此模擬利率的行爲變的相當重要。藉由利率模型來刻畫殖利率，並建立利率期間結構，也是各種利率模型發展的主要原因。利率模型的發展，依時間的先後，大致分成短期利率模型、遠期利率模型與市場利率模型，以下分別對這些利率模型做介紹。

(一) 短期利率模型

1. 均衡模型

首先由 Vasicek (1977)提出的模型，該模型主要具有均數回歸的特性，此特性讓利率不會有持續性的上漲或下跌。該短期利率的動態過程如下：

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dw$$

其中， r 表示瞬間短期利率， b 為模型中短期利率長期回歸的均數水準， a 是短期利率回歸至 b 水準的速度， σ 為短期利率的波動度。該模型的特色是假設簡單，有封閉解，但最大的缺點是可能產生負的利率，因此現階段鮮少人使用該模型。

為了解決可能產生利率為負的情況，Cox、Ingersoll 及 Ross(CIR, 1985)提出了下面短期利率的動態過程：

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r}dw$$

換言之，CIR 藉由假設波動度與短期利率的平方跟有關，還防止短期利率為負的情況。然而此一假設，使短期利率具有較複雜的非中央卡方分配(Non-Central Chi-Square)，故在使用上複雜許多。

2. 無套利模型

上述的短期模型，都存在一個主要缺失，即描繪出未來的殖利率水準，無法與現在的市場資料吻合，換句話說，利率期間結構在起始點便發生了問題。

如圖 2-1， $r(t)$ 是均衡模型中，所描述的短期利率動態過程，藉由此動態過程，我們可以找出不同起始日的殖利率曲線如 $P(0, T)$ 、 $P(t_1, T)$ 及 $P(t_2, T)$ 等。其中，透過短期利率模型在 0 時點求得的殖利率曲線 $P(0, T)$ ，無法和市場中已存在的 $P^M(0, T)$ 殖利率曲線吻合。

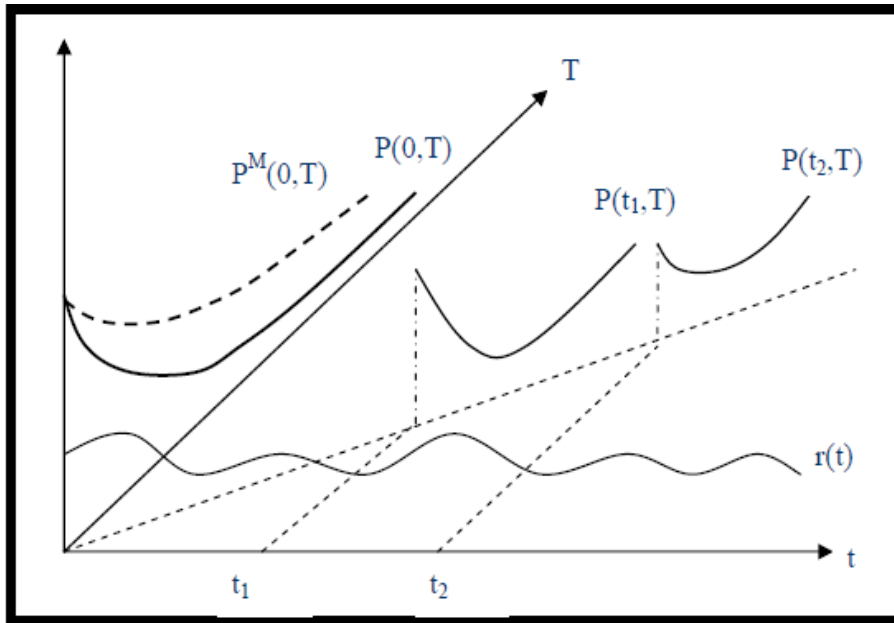


圖 2-1 無法吻合殖利率結構示意圖

無法與現在時點的利率期間結構吻合，可能因為參數限制太多，因此無套利模型的設定，可視為在參數上面做調整，藉著提高參數自由度，來吻合市場資料。首先提出的是 Ho-Lee (1986)的模型：

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dw$$

漂浮項設為時間的函數雖然改善了利率期間結構的估計，但卻沒有考慮均數回歸，造成利率無限升高或是利率為負的不合理情況可能出現。

Hull-White (1990)單因子模型，不但保留了均數回歸的特質，在參數的設定上也給予相當的自由度，模型假設如下：

$$\begin{aligned} dr(t) &= [\theta(t) + a(t)(b - r(t))]dt + \sigma(t)r(t)^\beta dw \\ &= a(t)[b'(t) - r(t)]dt + \sigma(t)r(t)^\beta dw \end{aligned}$$

其中， $a(t)$ 、 $b'(t)$ 與 $\sigma(t)$ 皆如同均數模型，分別表示均數回歸的速度、長期平均

水準與波動度，且都定為時間的函數，來提高參數的自由度，以便達到吻合現行的利率期間結構。

此外，經由適當的參數選擇，Hull-White 單因子模型事實上是 Vasicek ($\beta = 0$) 與 CIR ($\beta = 0.5$) 模型的一般化，因此保留住均衡模型中的主要優點—均數回歸，並且達到配合市場的利率期間結構與波動度結構的目的。然而由於模型的自由度提高，相對地也會造成參數校正不易，這也是 Hull-White 模型在運用時，最不方便之處。

面對複雜的波動度期間結構，Hull-White 的單因子模型並無法達到滿意的實證效果，因此，Hull-White (1994)更進一步提出了雙因子模型，來解決更複雜的波動度結構配適問題。

另外還有 Black、Derman 及 Toy (BDT, 1990)的利率模型，與前述各利率模型的差別，在於 BDT 假設瞬間短期利率服從對數常態分配，模型如下：

$$d \ln r(t) = \left[\theta(t) - \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln r(t) \right] dt + \sigma(t) dw$$

BDT 模型也給予了相當大的自由度來配適利率期間結構與波動度結構，但假定短期利率服從對數常態，卻造成不適用於評價部分利率衍生性商品，如債券或債券選擇權，此外，均數散逃(Mean Fleeting)的情況，也相悖於市場利率行爲。

(二) 遠期利率模型

所謂的短期利率模型，是描述瞬間的即期利率動態過程；而遠期利率模型，則是描述瞬間的遠期利率。其中又以 Heath、Jarrow 及 Merton (1990)為代表，模型如下：

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dw$$

其中， $f(t,T)$ 表示在 t 時點，觀察在 T 時點的瞬間遠期利率。如果讓 T 趨近於 t ，便得到短期利率的 $r(t)$ ，亦即 $f(t,t) = r(t)$ ， $\alpha(t,T)$ 與 $\sigma(t,T)$ 分別表示漂移項與擴散項。

早期的短期利率模型，都是在即期的時間點作利率行為的描述，所以遠期利率模型算是一種突破，至於遠期利率模型與短期利率模型的差異則以圖 2-2 來說明。

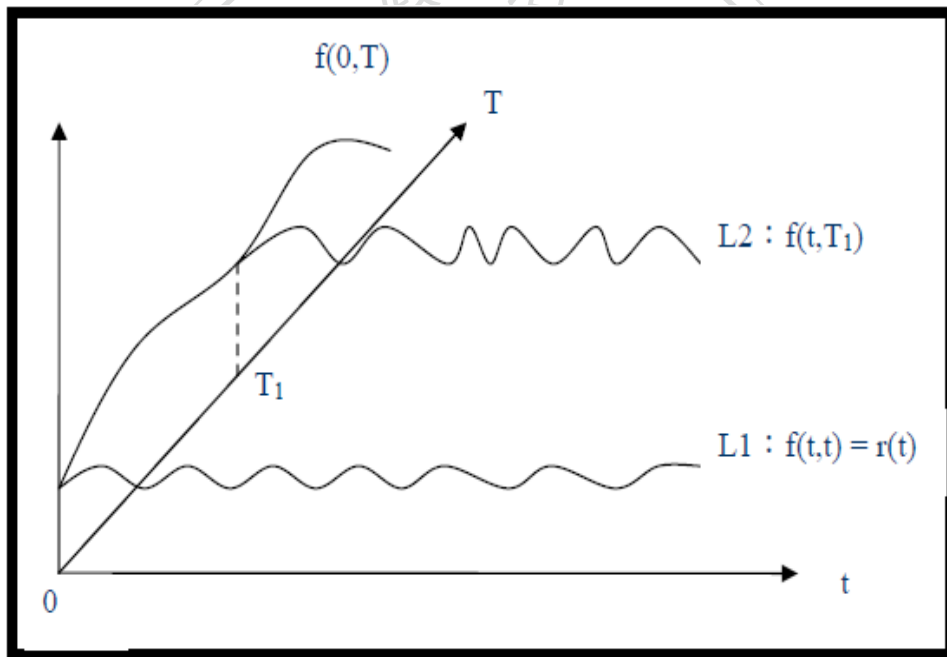


圖 2-2 短期利率與遠期利率模型差異圖示

短期利率模型的動態過程，通通是針對 L1 做描述，換言之，並沒有辦法捕捉到遠期利率的行為；而遠期利率模型，則是給定一個 T_i ，便描述出一個動態過程(如 L2，給定 T_1 ，便描述出 $f(t, T_1)$ 的動態過程)，因此短期利率可視為遠期利率的特殊情況。值得注意的，不論短期或遠期利率模型，都在敘述瞬間的利率行為，故觀察利率的角度，是瞬間連續的，然而，這卻不是市場的實際情況，也導致了

學者想針對該缺點作一改善。

(三) 市場模型

有鑑於描述利率連續的不合理，學者相繼發展出市場模型(Libor Market Model)。此模型開始對間斷的利率行爲進行描述，而描述的對象通常是市場上可觀察到的指標性利率，例如倫敦銀行間拆放款利率(Libor Rate)或交換利率(Swap Rate)。

首先，Brace、Gatarek 及 Musiela (1997)率先描述了 Libor 的動態過程，他們描述的利率行爲，是在區間內連續的，例如：在三個月內的 Libor 可視爲連續利率。此外，市場模型也解決了市場將利率與交換利率視爲對數常態的矛盾之處，亦即 BGM 引入了在間斷的遠期測度下，遠期利率是服從多元常態的。而 Jamshidian (1997)則發展出交換利率爲對數常態的模型。換言之，假設爲多元常態而使用 BS 公式，是建立在遠期測度之下的。

除了上面使用到的遠期測度，還有 Kawai (2002)提出的遠期交換測度。該模型是直接以交換利率的相關變數，當作計價單位，進而定義出一個遠期交換測度，好處是可以直接用來評價歐式利率交換選擇權。

而 Anderson 與 Andreasen (2000)則對 BGM 模型做了擴充，對於遠期波動度恆爲常數的缺陷作了修正，讓遠期利率模型更完備。

本文將以市場模型爲主，來做利率衍生性商品的評價與避險，詳見第三章的研究方法。

對於路徑相依的債券而言，本文採用 Lonstaff 與 Schwartz (2002)提出的最小平方蒙地卡羅法(Least Squares Monte Carlo，以下簡稱 LSM)。此方法為蒙地卡羅的改良方法，LSM 透過多條路徑對標的的模擬，來決定履約價值與持有價值，比較高低後，決定履約與否。

爲了提高模擬效率，本文亦採用 Weigel (2004)的投影概念對相關係數矩陣降秩，以期能減少抽樣數目，加速評價的過程。



第三章 研究方法

本章介紹評價利率衍生性金融商品的方法，第一節介紹本文將採用的利率模型，第二節詳述本文在各參數校準的步驟，第三節介紹解決提前履約的方法。

第一節 市場模型

考慮一個到期日結構 $0 = T_1 < T_2 < \dots < T_{K+1}$ ，並且定義一個右連續函數 $n(t)$ ，其中 t 滿足 $T_{n(t)-1} \leq t < T_{n(t)}$ ；定義 $P(t, T)$ ，為到期日 T ，在 t 時點的零息債券價格；另外定義 $F_k = F_k(t, T_{k-1}, T_k)$ ，表示在 t 時點，觀察區間為 (T_{k-1}, T_k) 的間斷遠期利率。則下列兩式必滿足(陳松男，利率金融工程學)：

$$F_k(t) = \frac{1}{\delta_k} \left(\frac{P(t, T_{k-1})}{P(t, T_k)} - 1 \right), \quad \delta_k = T_k - T_{k-1} \quad (3.1)$$

$$P(t, T_k) = P(t, T_{n(t)}) \prod_{j=n(t)}^{k-1} (1 + \delta_j F_j(t))^{-1}, \quad \forall t \leq T_k \text{ 且 } k \leq K \quad (3.2)$$

定義 Q^k 測度為一個以零息債券為計價單位的遠期測度，且該零息債券到期日為 T_k 。假設 Q^k 存在且唯一，則 $P(t, T_{k-1})/P(t, T_k)$ 在此遠期測度之下將會是一個平賭過程(Martingale)；改寫(3.1)式，得到 $P(t, T_{k-1})/P(t, T_k) = 1 + \delta_k F_k(t)$ 。則間斷性的遠期利率動態過程可表示如下：

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)^T dW_k^k(t) \quad (3.3)$$

其中 $W_k^k(t)$ 表示在 Q^k 測度下，描述 $F_k(t)$ 行為的 m 維布朗運動， σ_k 為一 m 維的波動度函數，滿足平方可積，且由 MRT (Martingale Representation Theorem) 可知 $\sigma_k(t)$ 尚需滿足適應性條件(Adapted)

在到期日不同的計價單位間做測度轉換時，Jamshidian (1997)導出下面公式：

$$dW_k(t) = dW_{k-1}(t) + \frac{\delta_{k-1}\sigma_{k-1}(t)}{1 + \delta_{k-1}F_{k-1}(t)} dt \quad (3.4)$$

也就是當我們由 Q^k 測度轉換到 Q^{k-1} 測度時，需要將步朗運動平移

$\frac{\delta_{k-1}\sigma_{k-1}(t)}{1 + \delta_{k-1}F_{k-1}(t)}$ 。如此疊代下去，可知由遠期測度 Q^k 轉到即期測度 Q 時，需經過

下式平移：

$$dW_k(t) = dW(t) + \sum_{j=n(t)}^{k-1} \frac{\delta_j\sigma_j(t)}{1 + \delta_jF_j(t)} dt \quad (3.5)$$

將(3.5)式代入(3.3)式，可得在即期測度下，遠期利率的動態過程：

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)^T [\mu_k(t)dt + dW(t)] \quad (3.6)$$

其中， $\mu_k(t) = \sum_{j=n(t)}^{k-1} \frac{\delta_j\sigma_j(t)}{1 + \delta_jF_j(t)}$ ， $W(t)$ 表示在即期測度下的 m 維布朗運動。

接下來討論波動度形式的設定。在 BGM (1997)模型中，假設波動度函數為遠期利率與時間函數的乘積；而 Andersen 與 Andreasen (2000)考慮了微笑波幅，稱做延伸形市場模型(Extended Market Model)。以下簡單說明這兩種模型，接著討論本文該使用何者模型。

(一) BGM

BGM 將波動度函數假設如下：

$$\sigma_k(t) = F_k(t)\lambda_k(t) \quad (3.7)$$

將(3.7)式帶入(3.6)式推導化簡可得遠期利率在 Q 測度之下是服從幾何布朗運動的；此外，Jamshidian (1997)也透過(3.7)式推導交換利率的動態過程。在第二章所提，對於利率與交換利率都假設為對數常態的矛盾，已經透過 BGM 與 Jamshidian 順利解決，換言之，不同到期日的利率或交換利率要服從對數常態，是建立在不同的遠期測度之下。

(二) Extended Market Model

然而，在(3.7)式的假設下，如同傳統的 BS 公式，沒有辦法解釋深價內外動度會不同的情形，亦即對於不同的履約價，波動度結構會有偏斜的情況 (Skew)。為此，Andersen 與 Andreasen (2000)在波動度的假設做了點更動，認為波動度是由遠期利率函數與時間函數決定：

$$\sigma_k(t) = \varphi(F_k(t))\lambda_k(t) \quad (3.8)$$

此為延伸形市場模型(Extended Market Model or Extended BGM)。

對於 φ 函數的選取，可分成 CEV (Constant Elasticity of Variance)與 LCEV(Limited Constant Elasticity of Variance)模型。以下說明此兩種模型：

1. CEV (Constant Elasticity of Variance)

CEV 模型假設 $\varphi(x) = x^\alpha$ ，代入(3.3)式與(3.8)式後可得到在 CEV 模型之下，遠期利率的動態過程：

$$dF_k(t) = F_k(t)^\alpha \sigma_k(t)^T dW_k(t) \quad (3.9)$$

在 $0.5 \leq \alpha < 1$ 時，此動態過程符合唯一解以及界限條件 $F = 0$ 。我們也可以求得利率買權(封閉解)以及利率交換選擇權(近似解)的評價公式。

2. LCEV (Limited Constant Elasticity of Variance)

LCEV 模型假設 $\varphi(x) = x \cdot \min(\varepsilon^{\alpha-1}, x^{\alpha-1})$ ，其中 $\varepsilon > 0$ 。事實上，在 $\varepsilon \rightarrow 0_+$ ($\alpha < 1$) 或 $\varepsilon \rightarrow \infty$ ($\alpha > 1$) 時，LCEV 模型是可以逼近至 CEV 模型的。

BGM 模型的優點在於計算標準利率商品如利率上限選擇權或歐式利率交換選擇權的封閉解或近似解較容易，但是如前面所提無法解釋深價內外波動度結構的偏斜情況；而 Extended BGM 模型較能符合市場上的波動度結構。但是 Extended BGM 模型，在假設 CEV 的情況下，需要再去估計參數 α ，在與市場波動度結構

配適，雖然業界大都直接假設 $\alpha = 0.5$ ，要配適波動度結構仍稍嫌耗時。為求簡單，本文將採用最基本的 BGM 模型。

在模擬時，需要考慮在不同的遠期利率，在不同的測度下有不同的動態過程。Brigo 與 Mercurio(2001)一書中，便導出了 BGM 模型在各測度 Q^i 之下遠期利率的動態過程：

$$i < k, t \leq T_i: dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\rho_{k,j} \delta_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \delta_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t) dW_k^i(t)$$

$$i = k, t \leq T_i: dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) dW_k^i(t)$$

$$i > k, t \leq T_i: dF_k(t) = -\sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=k+1}^i \frac{\rho_{k,j} \delta_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \delta_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t) dW_k^i(t)$$

所以就模擬的角度而言，我們也採用 BGM 為利率模型的基礎。

第二節 模型參數校準

本文在評價利率衍生性金融商品時，是使用蒙地卡羅法與最小平方蒙地卡羅法(LSM)，因此首先需模擬出未來的利率行爲。也因此如何合理的描繪遠期利率的路徑，是相當重要的。在選用 BGM 模型的情形下，首先求出在時點 0 (也就是發行日當天)的遠期利率當作模擬遠期利率的起始值；接著計算波動度期間結構，以期能和市場報價同步；最後由於遠期利率是彼此互相影響，因此各遠期利率間的相關係數的校準也是很重要的。以下就遠期利率、波動度期間結構、相關係數的校準進行討論。

(一) 遠期利率

為求發行日當天的各個遠期利率，首先需先求得殖利率。在 LIBOR 市場上，通常以特定期間為單位報價，例如「6 month LIBOR」或「12 month LIBOR」。這是指從現在算起，六個月或十二個月的即期利率，以遠期利率的符號表示為 $F(0,0,0.5)$ 或 $F(0,0,1)$ 。

然而在市場資料不足的情況下，通常以交換利率當作長年期 LIBOR 的參考。交換利率通常以年為單位，首先用非線性差補法(cubic spline)內插出以半年為期的交換利率。且已知交換利率的計算方式為：

$$S_{0,N}(t) = \frac{1 - P(t, T_{N+1})}{\delta \sum_{i=1}^{N+1} P(t, T_i)} \quad (3.10)$$

代表在 $t = T_0 = 0$ (現在)時點，觀察到的交換利率 $S_{0,N}(t)$ ，其中交換間距為 δ ，並在 T_0 、 T_1 、 \dots 、 T_N 重設利率， T_1 、 T_2 、 \dots 、 T_{N+1} 交割。將上式移項得：

$$S_{0,N}(t) \delta \sum_{i=1}^{N+1} P(t, T_i) + P(t, T_{N+1}) = 1 \quad (3.11)$$

再利用遠期利率與零息債券價格的關係 $P(t, T_k) = 1 / (1 + F(t, t, T_k))^{\delta k}$ ， $\forall k$ 帶回上式得：

$$S_{0,N}(t) \delta \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{(1 + F(t, t, T_i))^{\delta i}} + \frac{1}{(1 + F(t, t, T_{N+1}))^{\delta(N+1)}} = 1 \quad (3.12)$$

在前幾期遠期利率 $F(t, t, T_1)$ 、 $F(t, t, T_2)$ 、 \dots 、 $F(t, t, T_N)$ 及交換利率 $S_{0,N}(t)$ 已知的情況下利用(3.12)式及拔靴法可得 $F(t, t, T_{N+1})$ 。如此下去即可描繪出與市場相符的殖利率曲線。

接下來如圖所示，需求算在 t 時點觀察不同區間 (T_k, T_{k+1}) 的遠期利率，以符號表示為 $F(t, T_k, T_{k+1})$ 。

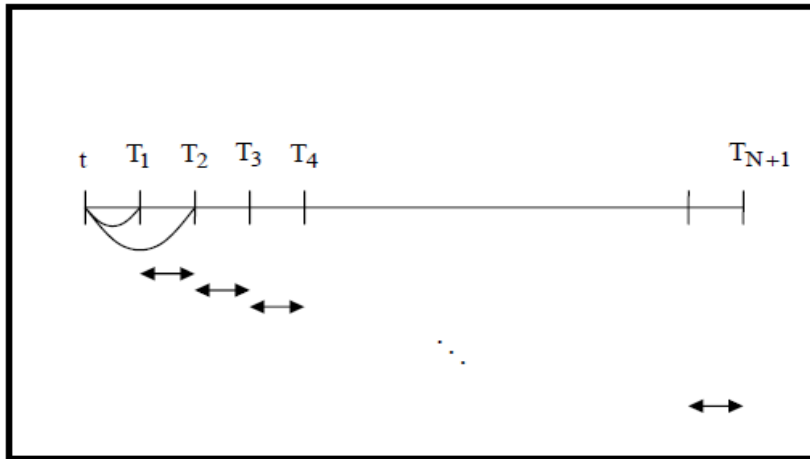


圖 3-1 推算遠期利率

利用無套利條件：

$$(1 + (T_k - t)F(t, t, T_k))(1 + (T_{k+1} - T_k)F(t, T_k, T_{k+1})) = (1 + (T_{k+1} - t)F(t, t, T_{k+1})), k = 1, 2, \dots, N$$

移項整理得：

$$F(t, T_k, T_{k+1}) = \frac{(T_{k+1} - t)F(t, t, T_{k+1}) - (T_k - t)F(t, t, T_k)}{(T_{k+1} - T_k)}, k = 1, 2, \dots, N \quad (3.13)$$

如此疊代下去，即可求得所有的期遠期利率。

(二) 波動度校準

目前市場上與遠期利率波動度有關的報價，為利率上限選擇權(Cap)，並以 BS 公式裡波動度除以時間的平方根呈現，意思是市場以 $v_{T_j - cap}$ 報價，在使用 BS

公式時，再修正成 $\sigma_{BS} = \sqrt{T_{j-1}} v_{T_j - cap}$ 。所以在市場上 T_j 年期，履約價 K ，期初遠期利率 $F(t)$ ，在期初 t 時點的利率上限選擇權價格為：

$$Cap(t, T_j, K) = \sum_{i=1}^j \delta_i P(t, T_i) BS(F_i(t), K, \sqrt{T_{i-1}} v_{T_j - cap}) \quad (3.14)$$

其中

$$BS(F(t), K, \sigma) = F(t)N(d_1) - KN(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(F(t)/K) + 0.5\sigma^2}{\sigma}, d_2 = d_1 - \sigma$$

$N(x)$ 為標準常態累積分配函數，即 $N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 。另一方面，假設利率上限買權在 t 時點的價格為 $Caplet(t)$ ，在 T_{i-1} 重設， T_i 交割，且令利率上限買權的波動度為 $v_{T_i-caplet}$ 。則合理的利率上限選擇權價格為：

$$\begin{aligned} & Cap(t, T_j, K) \\ &= \sum_{i=1}^j Caplet(t, T_{i-1}, T_i, K) \\ &= \sum_{i=1}^j \delta_i P(t, T_i) BS(F_i(t), K, \sqrt{T_{i-1}} v_{T_i-caplet}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

透過(3.14)式等於(3.15)式，加上已知市場利率上限選擇權的波動度報價 v_{T_j-cap} ，便可以校準出利率上限買權的波動度 $v_{T_i-caplet}$ ，此即為相同區間遠期利率的波動度。

為了降低估計的複雜度，通常假設遠期利率的波動度為分段常數的型態，而 Brigo 與 Mercurio (2001) 提出的分段常數型態大至上可分為五種，以下就這五種型態作簡介。

1. $\sigma_{k, \beta(t)}$ 型態

k 表示第 k 期遠期利率，而 $\beta(t) = m$ 表示所處時點 t 滿足 $T_{m-2} < t < T_{m-1}$ 。此型態表示波動度與所屬遠期利率和時點有關，即 $\sigma_k = \sigma_{k, \beta(t)}$ 。換言之，對於每一個不同的遠期利率以及不同的時點，會有不同的波動度，但要注意在區間內是常數，如下表：(*表示在該區間遠期利率已知)

表 3-1 第一種型態

$\sigma_k = \sigma_{k,\beta(t)}$	$(0, T_0)$	(T_0, T_1)	(T_1, T_2)	...	(T_{M-1}, T_{M-2})
$F_1(t)$	$\sigma_{1,1}$	*	*	...	*
$F_2(t)$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$	*	...	*
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$F_M(t)$	$\sigma_{M,1}$	$\sigma_{M,2}$	$\sigma_{M,3}$...	$\sigma_{M,M}$

由表可知需估計 $(1+M)M/2$ 個參數。

2. $\eta_{k-(\beta(t)-1)}$ 型態

k 與 $\beta(t)$ 定義如同第一種型態，但是假設遠期利率只有受到到期期限的影響，符號表示為 $\sigma_k = \eta_{k-(\beta(t)-1)}$ ，由下表可知需估計 M 個遠期利率波動度。

表 3-2 第二種型態

$\sigma_k = \eta_{k-(\beta(t)-1)}$	$(0, T_0)$	(T_0, T_1)	(T_1, T_2)	...	(T_{M-1}, T_{M-2})
$F_1(t)$	η_1	*	*	...	*
$F_2(t)$	η_2	η_1	*	...	*
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$F_M(t)$	η_M	η_{M-1}	η_{M-2}	...	η_1

3. s_k 型態

k 與 $\beta(t)$ 定義如同第一種型態，但是假設波動度只和所屬遠期利率有關，以符號表示為 $\sigma_k = s_k$ ，所以在同一個遠期利率下，波動度都設為平坦的常數。由下表可知，需估計 N 個參數。

表 3-3 第三種型態

$\sigma_k = s_k$	$(0, T_0)$	(T_0, T_1)	(T_1, T_2)	...	(T_{M-1}, T_{M-2})
$F_1(t)$	s_1	*	*	...	*
$F_2(t)$	s_2	s_2	*	...	*
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$F_M(t)$	s_M	s_M	s_M	...	s_M

4. $\varphi_k \psi_{\beta(t)}$ 型態

k 與 $\beta(t)$ 定義如同第一種型態。將波動度拆解成兩個函數相乘，分別是所屬遠期利率群組 φ_k 與所處時間點 $\psi_{\beta(t)}$ 的函數，因此在不同區間裡會隨著所處時點 t 的不同，透過 $\psi_{\beta(t)}$ 產生非平坦的波動度結構。見下表

表 3-4 第四種型態

$\sigma_k = \varphi_k \psi_{\beta(t)}$	$(0, T_0)$	(T_0, T_1)	(T_1, T_2)	...	(T_{M-1}, T_{M-2})
$F_1(t)$	$\varphi_1 \psi_1$	*	*	...	*
$F_2(t)$	$\varphi_2 \psi_1$	$\varphi_2 \psi_2$	*	...	*
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$F_M(t)$	$\varphi_M \psi_1$	$\varphi_M \psi_2$	$\varphi_M \psi_3$...	$\varphi_M \psi_M$

若將所處時點的函數令作 1，可得到第三種 s_k 型態，固第三種為本類型的特例。

5. $\varphi_k \zeta_{k-(\beta(t)-1)}$

k 與 $\beta(t)$ 定義如同第一種型態。本類型與第四類有相同的所屬遠期利率 φ_k 函數，但另一個函數為到期期限 $\zeta_{k-(\beta(t)-1)}$ ，因此對角線的到期期限函數是一樣的。和第四類一樣，會隨著所屬遠期利率群組和到期期限，產生非平坦的波動度結構，如下表：

表 3-5 第五種型態

$\sigma_k = \varphi_k \zeta_{k-(\beta(t)-1)}$	$(0, T_0)$	(T_0, T_1)	(T_1, T_2)	...	(T_{M-1}, T_{M-2})
$F_1(t)$	$\varphi_1 \zeta_1$	*	*	...	*
$F_2(t)$	$\varphi_2 \zeta_2$	$\varphi_2 \zeta_1$	*	...	*
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$F_M(t)$	$\varphi_M \zeta_M$	$\varphi_M \zeta_{M-1}$	$\varphi_M \zeta_{M-2}$...	$\varphi_M \zeta_1$

將 φ_k 全部由常數 1 取代，便得第二類型 $\eta_{k-(\beta(t-1))}$ 型態，因此第二類型為本類型的特例。

(三) 相關係數

對於 $F_k(t)$ 的模擬，在 BGM 模型之下，針對不同的測度 Q^i 會有不同的動態過程，如下：

$i < k, t \leq T_i :$

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\rho_{k,j} \delta_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \delta_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t) dW_k^i(t) \quad (3.16)$$

$i = k, t \leq T_i :$

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) dW_k^i(t) \quad (3.17)$$

$i > k, t \leq T_i :$

$$dF_k(t) = -\sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=k+1}^i \frac{\rho_{k,j} \delta_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \delta_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t) dW_k^i(t) \quad (3.18)$$

在模擬的過程中，需抽取一序列的隨機變數 $dW_k^i(t)$ ，呈現利率的隨機走勢。然而由於遠期利率的相關性，必須抽取相關的隨機變數 $dW_k^i(t)$ 。

首先利用歷史資料求得遠期利率的相關係數矩陣 ρ 。其中

$\rho_{i,j} = \text{corr}(F_i(t), F_j(t))$ 為遠期利率的 $F_i(t)$ 與 $F_j(t)$ 的相關係數。假設我們需要模擬 M 個遠期利率，則 ρ 為一 $M \times M$ 對稱矩陣。我們需要同時抽出 M 個相關的常態隨機變數。在 M 很大，加上需模擬很多期，抽樣的個數將相當可觀，在此我們希望透過一些線性代數方法，降低抽樣數目以及增加運算效率。

首先若 ρ 為正定(Positive Definite)且秩(Rank)為 M 的對稱矩陣下，我們欲產生 M 個相關的常態亂數 $Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_M]$ ，其中 $E[Z_i] = 0, \text{Var}[Z_i] = 1$ ，且相關係數矩陣為 ρ 。假設另外存在一個 $M \times M$ 矩陣 A 與獨立隨機向量 $X = [X_1, X_2, \dots, X_M]$ ，其中 $E[X_i] = 0, \text{Var}[X_i] = 1$ ，滿足 $Z = AX$ 。則 $\rho = I\rho I = \text{Var}(Z) = E(ZZ^T) = E(AXX^T A^T) = AA^T$ 。

由於 ρ 為一正定矩陣，固可用 Cholesky Decomposition 分解得 A 為一 $M \times M$ 下三角矩陣。再將 A 乘以獨立標準常態隨機向量 X ，即得 M 個相關的常態隨機亂數 Z 。以下舉 $M=3$ 為例。

假設需求取三個相關的隨機亂數且相關係數矩陣

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

另外令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

將 ρ 做 Cholesky Decomposition 使得 $\rho = AA^T$ ，即：

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} & a_{11}a_{31} \\ a_{11}a_{21} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} \\ a_{11}a_{31} & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{bmatrix}$$

求解 a_{11} 、 a_{21} 、 a_{31} 、 a_{22} 、 a_{32} 、 a_{33} 後，令 $Z = AX$ ，即得相關的隨機亂數

$$Z = [Z_1, Z_2, Z_3]^T。$$

在希望降低秩的目的上，我們希望選擇一個秩為 n 的 $M \times n$ 矩陣 B ， $n \leq M$ 來代替矩陣 A ，意思是找出一個代替 ρ 的矩陣 ρ^B ，滿足 $\rho^B = BB^T$ ，注意 ρ^B 的秩為 n 。如此一來原本要同時抽取 M 個互相關聯的常態隨機變數，變成只需抽取 n 個相關聯的隨機常態變數，抽樣環境從 $dZ(dZ)^T = AdW^M (AdW^M)^T = \rho dt$ 變為 $BdW^n (BdW^n)^T = \rho^B dt$ 。以下提供一個具體降低秩的方法。

此處依照 Wigel(2004)提出的投影概念，對相關係數矩陣做調整。Wigel 的想法是，給定一個秩為 M 的 $M \times M$ 相關係數矩陣 ρ ，注意 ρ 的對角線為 1 且對稱，接著定義三個集合，分別為正定矩陣集合、對角線為 1 的矩陣集合、秩為 k 且對稱的集合。符號定義如下：

$$S = \{Y = Y^T \in R^{M \times M} \mid Y \geq 0\}$$

$$U = \{Y = Y^T \in R^{M \times M} \mid y_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, M\}$$

$$S_k = \{Y = Y^T \in R^{M \times M} \mid \text{rank}(Y) = k, k \in N, k \leq M\}$$

而將相關係數矩陣 ρ 投影在各集合的算法，依序表示如下：

$$P_S(\rho) = \Pi \text{diag}(\max(\lambda_i, 0)) \Pi^T$$

$$P_U(\rho) = \begin{cases} \rho_{ij} & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$P_{S_k}(\rho) = \Pi \text{diag}(\max(I_{k < i} \lambda_i, 0)) \Pi^T$$

其中 $P_A(\bullet)$ 表示在 A 集合上的投影， λ_i 與 Π 分別表示 ρ 的特徵值與特徵向量矩陣。固給定相關係數矩陣 ρ 之後，依照下面的流程，經由迭代的方式，直到取得秩為 k 的相關係數矩陣 ρ^k 為止。

$$\begin{aligned}
\Delta I_0 &= 0, \quad Z_0 = \rho \\
R_n &= Z_{n-1} - \Delta I_{n-1} \\
X_n &= P_S(R_n) \\
\Delta I_n &= X_n - R_n \\
Y_n &= P_{S_k}(X_n) \\
\rho_n^k &= P_U(Y_n)
\end{aligned}$$

以上步驟將持續到 ρ_n^k 秩數達到 k 為止。至於 k 的決定，首先必須先決定一個可以容忍的誤差範圍 ε ，這裡的誤差，指的是範數，以符號表示為

$\gamma(\rho_n^k) = \|\rho - \rho_n^k\|_F$ ，其中 $\|A\|_F^2 = \sum a_{ij}^2$ 表示 Fobenius Norm，使得 $\gamma(\rho_n^k) < \varepsilon$ 。一般而言，秩數越低，範數會越高，表示誤差越大。

完成上述步驟，便得一個足以代表原相關係數矩陣 ρ 的矩陣 ρ^k 。注意 ρ^k 的秩為 $k < M$ 且 ρ^k 為正定，以符號表示為 $\rho^k \in S \cap U \cap S_k$ 。如此透過 Wigel 的建議，可以降低抽樣數目，減少模擬需要花費的時間。

第三節 最小平方蒙地卡羅法

在市場模型下，一些簡易的利率衍生性商品可得到封閉解。然而對於報酬型態複雜的商品，只能用數值方法來求得價格，其中以蒙地卡羅法最容易使用。

對於某些附贖回權的利率衍生性金融商品，上面的方法需要再擴充。Lonstaff 與 Schwartz (2001) 提出最小平方蒙地卡羅法 (Least-Squared Monte Carlo)，就是為了解決提早履約的問題。對於券商而言，透過比較持有價值與贖回價值，來決定是否提前履約，若是持有價值高於贖回價值，則提前贖回。

假設模擬 M 次，模擬路徑為 ω_m ， $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ 。沿用前一節到期日結構 $0 = T_1 < T_2 < \dots < T_{K+1}$ ，並且定義在 t 時點觀察 T_n 時點的持有價值為 $H_n(T_n)$ ，提前

贖回價值為 $C_n(T_n)$ 。

Lonstaff 與 Schwartz (2001)的想法是，對於所有模擬出來的路徑，找出一個履約法則(Stopping Rule)矩陣(橫向為時間，縱向為路徑)，再根據此矩陣做現金流量的折現，平均得到期初價格。簡單來說，我們必須在每個可贖回時點決定持有價值 $H_n(t)$ 與贖回價值 $C_n(t)$ 。

一般而言，持有價值一定是無法預先得知的。為了估計個贖回點的持有價值，Lonstaff 與 Schwartz 選擇回歸模型裡的最小平方法，如圖 3-2。

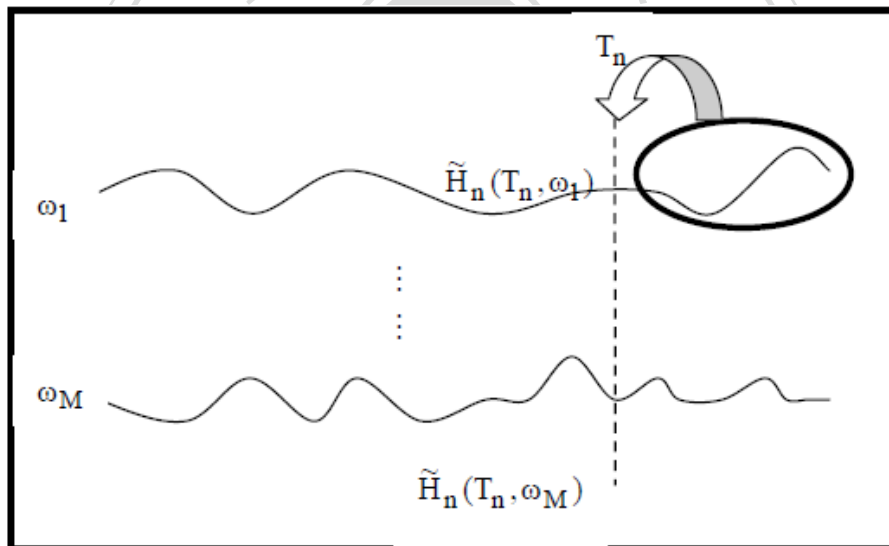


圖 3-2 最小平方蒙特卡羅法估計持有價值

在圖 3-1 中，每個路徑 ω_i 上，由於持有價值觀察不到，因此用 $\tilde{H}_n(T_n, \omega_i)$ 代替。它的求法通常是把 T_n 之後的所有現金流量(圖 3-1 裡的橢圓形)折現至 T_n 加總。然而 $\tilde{H}_n(T_n, \omega_i)$ 並不表示「真正」的持有價值，這只是一個點估計。然而在 T_n 時點上，總共有 M 個 $\tilde{H}_n(T_n, \omega_i)$ ，Lonstaff 與 Schwartz 把這 M 個可能的持有價值當作應變數，再自行引入可能的自變數，便可做出一條 T_n 時點上的回歸估計式，

最後由回歸式，估計出持有價值 $\hat{H}_n(T_n, \omega)$ 。

決定了各時點的持有價值，接著該決定履約法則矩陣，以計算現金流量。首先令矩陣最後一行為 1 (表示贖回)，其他為 0 (表示不贖回)。由期末 T_{K+1} 往期初倒推，對於每條路徑在各時點 T_i ，比較持有價值 $\hat{H}_i(T_i, \omega)$ 與贖回價值 $\hat{C}_i(T_i, \omega)$ ，若 $\hat{H}_i(T_i, \omega) > \hat{C}_i(T_i, \omega)$ 則矩陣在該路徑時點 T_i 記 1，並將後面各時點記 0。注意持有價值 $\hat{H}_i(T_i, \omega)$ 由各時點參數帶入回歸式決定，贖回價值 $\hat{C}_i(T_i, \omega)$ 是已知。如此履約矩陣將滿足每列只有一個 1，其他為 0。接這根據著個矩陣對每條路徑上現金流量做折現，加總之後再取平均，整個 LSM 的評價流程便完成了。

注意不同的模擬路徑會有不同的履約法則矩陣，但是實際上並不需要對將所有模擬路徑拿來做簡單回歸。Lonsstaff 與 Schwartz 建議，先在夠多的路徑上，進行一次最小平方蒙地卡羅法，並且留下每個時點上的回歸係數，接著再用獨立於此樣本的模擬路徑所模擬出的參數，帶入回歸式，估計出這條新路徑上的持有價值。換言之，各時點上的回歸係數是「事先」求得的。例如需模擬 10,000 次，不需要去做樣本數為 10,000 的回歸估計，可以先模擬出 1,000 條路徑，再根據這 1,000 條路徑求得解釋變數與應變數(持有價值)的值，以此做簡單回歸得到回歸係數，之後在 10,000 次的模擬中，只需求出解釋變數的值，並帶入事先求得的回歸式，即可當做持有價值。在 Andersen (2000) 的評價方法中，也是「事先」求得一個最適履約法則，再用樣本外的其他路徑做評價。

對於回歸式的決定，是將每一路徑上的持有價值 $\hat{H}_n(T_n, \omega_i)$ 當做應變數，對於自變數的選擇，應該以能高度解釋或著影響持有價值的變數為優先。另外，選擇出來的自變數，最好是一些有流動性的基本商品，例如利率上限買權、政府公

債、LIBOR Rate、交換利率等可觀察到或是有封閉解的流動性商品。

關於回歸式中的基本函數有許多選擇，Lonstaff 與 Schwartz 提到可以使用的函數包含 Lagurre 多項式、Hermite 多項式、三角函數...等。以下僅列出具有權重的 Lagurre 多項式形態：

$$L_n(X) = \exp\left(-\frac{X}{2}\right) \frac{e^X}{n!} \frac{d^n}{dX^n} (X^n e^{-X}) \quad (3.19)$$

Lonstaff 與 Schwartz 也提到當回歸式中幾本函數的個數夠大且用最小平法蒙地卡羅法模擬的次數趨近無窮大時，模擬出來的價格會等於理論價格。但 Lonstaff 與 Schwartz 以實證說明只需要取到 $n = 3$ 就夠用了。

對於基本函數的選擇，在 LSM 方法中是非常具有彈性的，甚至取多項式至三次方也能得到良好結果，本文將採用簡單的多項式當基本函數。

第四章 12 年期美金計價『利率區間』連動債券

第一節 前言

爲了迎合投資人喜好，在市場裡出現相當多種類的結構型商品，依類型可分爲五類，分別爲股權連結型、利率連結型、外匯連結型、商品連結型、信用連結型等結構型商品。本文所評價的商品，則是屬於利率連結型商品。

利率結構型商品的特色是連結某些指標利率，觀察該指標利率的走勢有沒有符合計息條件，若有，通常可以獲得比市場利率更高的計息。這項誘因，讓投資人相當喜歡投資利率結構型商品。然而，相對的，只要投資人情勢判斷錯誤，將會面臨低利息的風險，甚至可能導致收到零息的風險。

爲了避免投資人本金全無的風險，導致商品交易不熱絡，這些利率型結構商品往往另外附有保本條款；另一方面，發行商爲了保護自己，往往也加入了可贖回條款，免得整個局勢完全偏向投資人。兼顧保本與發行商可贖回，是利率型結構商品的主要特色。

至於連結的指標利率，往往以 LIBOR 或 CMS 爲主。而依付息條件型態的不同，簡易分成滾雪球型態、逆浮動型態、斜率型態、利差型態與利率區間型態等。共同特徵在於符合某一項條件之後，才發生計息事件。

第二節 商品介紹

本文所評價的商品為「12 年期美金計價『利率區間』連動債券」。

(一) 產品說明書

表 4-1 12 年期美金計價『利率區間』連動債券

商品名稱	12 年期美金計價『利率區間』連動債 (12 Year Non-Call 3 Months Callable Range Accrual Note)
發行機構	英國駿懋銀行 (Lloyds TSB Bank Plc)
最小投資金額	10,000 美元
投資期間	12 年
連結標的	美元 3 個月期英國倫敦金融同業拆款利率 (3 MONTH USD LIBOR)
發行日	2005/7/14
起息日	2005/7/14
發行價格	100%
保本率	100%
收益率	2005 年 7 月 14 日至 2017 年 7 月 14 日的投資期間內，若觀察日之指標利率落入該其計息區間內，則該觀察日依表 4-2 之收益率計算方式逐日計算其收益 當期收益計算：當期年收益率 \times N/M \times 90/360 N：每一觀察期間中觀察日之指標利率落入計息區間的天數 M：每一觀察期間中納入計算基礎之總天數
利息計算	採 30/360，每季計息
利息支付	每季支付
贖回條款	發行者有權利在每個利息支付日提前贖回(需在五天前通知投資人)，惟提前贖回保證 100%還本，並與當日配息一併入帳
手續費	0.5%

表 4-2 計息區間

期間	計息區間	年收益率
第 1 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 5.00\%$	7.00%
第 2 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 5.25\%$	前期收益率
第 3 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 5.50\%$	前期收益率
第 4 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 5.75\%$	8.00%
第 5 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 6.00\%$	前期收益率
第 6 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 6.25\%$	前期收益率
第 7 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 6.50\%$	9.00%
第 8 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 6.75\%$	前期收益率
第 9 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 7.00\%$	前期收益率
第 10 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 7.00\%$	10.00%
第 11 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 7.00\%$	前期收益率
第 12 年	$0 \leq 3M \text{ USD LIBOR} \leq 7.00\%$	前期收益率

配息之計算方式舉例而言：

假設本債券第 6 其收益計算期間內，觀察日指標利率落入該期區間之觀察日天數為 N，當期收益期間總天數為 M，第 5 期的年化收益率為 6.8%，擇投資人第 6 期之配息為：

投資本金 $\times(6.8\% \times N/M) \times 90/360$

(二) 產品特色

本商品有三個主要特色，一是對三個月期美元利率走勢的看法；二是債券為保本型債券；三是每日計息。

如果三個月期美元利率走勢穩定，亦即利率沒有大幅走高，則投資人可獲得高利率。相反的，若是利率大幅走高，則投資人將蒙受利息損失，甚至可能有零息的狀況。

不論三個月美元利率走勢為何，本產品在到期或提前贖回時，投資人都可拿回 100% 本金，最大的損失是賺取利息的機會成本，對投資人來說是個保障。保本的部分也是這個債券的主要價值。

第三個特色為每日計息，讓投資人不用擔心錯過任何一波低利率走勢，在利率預期穩定之下，投資人較容易拿到高額配息。

第三節 情境分析

本商品為利率連動商品，利率的高低將影響本產品的價格、發行商與投資人的利潤，此處就三種可能的情況作情境分析。

(一) 利率上升

假如未來 3-month LIBOR 上升，標的物落入計息區間的天數減少，將使得投資人拿到較低的利息，且由於利率較高，此時折現將使債券價格大幅下降。再加上本產品流動性風險且投資人無法提前賣回債券，投資人只有損失利息一途。若發生極端的情況，也就是每日 3-month USD LIBOR 飆高不落在區間內，發行商只需在期末以面額 10,000 還本，以期初時點來看，發行商可享有

$$10,000 - \frac{10,000}{(1 + 0.0476)^{12}} = 4,276.6 \text{ 美元的利潤。}$$

(二) 利率下降

假如利息下降將使標的落入計息的區間變多，使得投資人得以拿到較高的利息。且利率降低使得本債券在折現時有較高的價格，整體情況對投資人是相當有利，但是需注意的是券商在判斷利率將持續走低時，發行商極有可能執行贖回權力。另一個極端的情況，假設在第一個付息日發生了每天都符合計息條件的極端

狀況，也就是每日 3-month USD LIBOR 落在所設定的區間，則投資人將獲得 $7\% \times 90/360$ 的高利息，此時贖回債券價格在期初為

$$\frac{10,000(1 + \frac{90}{90} \times \frac{90}{360} \times 6\%)}{(1 + 0.0368)^{90/360}} = 10,058.71$$

，已經高過發行價格 10,000，所以除非發行

商預估未來的利率走勢將對發行商更不利，幾乎不會在首幾個計息日執行贖回條款。在發行頭兩季利率穩定的情況下，投資人幾乎篤定可以拿到 7% 的年利率。

(三) 利率上升但仍在計息區間內

這種情況，投資人仍可拿到較高的配息，但是由於利息較高，折現至今日的價格稍微降低。在這種情形下，由於債券利息仍然高於市場，券商執行贖回權的機率很大。

第四節 評價

在進行商品評價之前，需要先對市場資料進行利率模型參數的校準。依序先完成殖利率曲線與遠期利率，接著是波動度結構與係數矩陣，最後進入最小平方蒙地卡羅法在市場模型的應用。評價流程如圖 4-1。

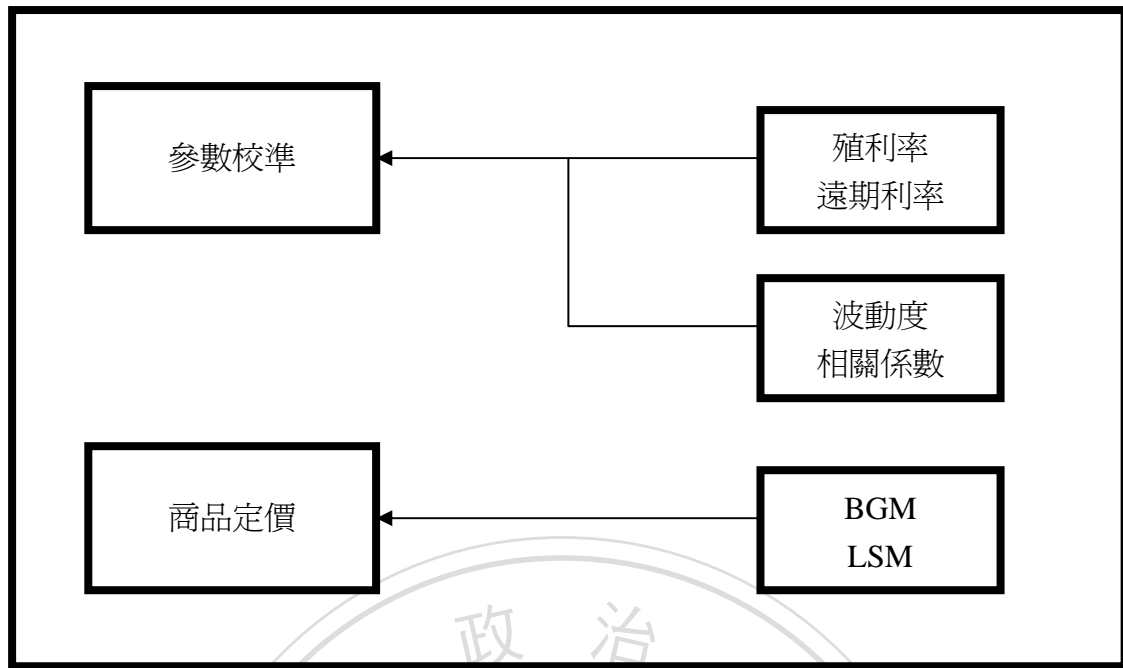


圖 4-1 評價流程圖

(一) 殖利率

殖利率的相關報價，大致上以英國倫敦同業拆款率與交換利率為主，這兩者將是參數校準的依據。在發行日 2005/7/14 當天，兩者的市場報價分別列於表 4-3 與表 4-4。

表 4-3 2005 年 7 月 14 日交換利率的市場報價

年期	交換利率(%)	年期	交換利率(%)
1Y	4.05	8Y	4.505
2Y	4.185	9Y	4.54
3Y	4.26	10Y	4.58
4Y	4.32	12Y	4.65
5Y	4.375	15Y	4.73
6Y	4.42	20Y	4.81
7Y	4.46	30Y	4.86

表 4-4 2005 年 7 月 14 日 LIBOR 的市場報價

到期	LIBOR(%)
6months	3.83
12months	4.05063

蒐集完上面兩種市場資料後，首先要進行殖利率曲線的估計，如(3.12)式：

$$S_{0,N}(t)\delta\sum_{i=1}^{N+1}\frac{1}{(1+F(t,t,T_i))^{\delta i}}+\frac{1}{(1+F(t,t,T_{N+1}))^{\delta(N+1)}}=1 \quad (4.1)$$

用拔靴法利用市場上已知的交換利率與即期利率，求出下一期的即期利率。注意(4.1)式中交換利率並沒有充裕的報價資訊，所以在進行殖利率校準之前，必須先用非線性內插法(Cubic Spline)插補出需要的交換利率，如 1.5 年期、2.5 年期等交換利率。

結束交換利率的插補後，經由(4.1)式，便可以完整描繪出 2005/7/14 當天的每六個月殖利率曲線。例如已知六與十二個月的即期利率 $F(0,0,180)$ 與 $F(0,0,360)$ ，以及 1.5 年期交換利率 $S_{0,1.5}(0)$ ，則這些資料與第十八個月的殖利率 $F(0,0,540)$ 透過(4.1)式可寫成：

$$S_{0,1.5}(0)\times\frac{180}{360}\left[\frac{1}{(1+F(0,0,180))^{180/360}}+\frac{1}{(1+F(0,0,360))^{360/360}}+\frac{1}{(1+F(0,0,540))^{540/360}}\right]+\frac{1}{(1+F(0,0,540))^{540/360}}=1$$

移項之後，便可求得第十八個月的殖利率 $F(0,0,540)$ 。如此反覆下去，可建構出每六個月的殖利率曲線。

經由市場資訊求得每六個月的殖利率曲線後，做每天插補的動作，即完成每天的殖利率曲線。因此，在這一步驟，將得到 $F(0,0,1)$ 、 $F(0,0,2)$ 、...、 $F(0,0,10800)$

共 $30 \times 360 = 10800$ 個殖利率，圖 4-2 為校準完成的殖利率曲線。

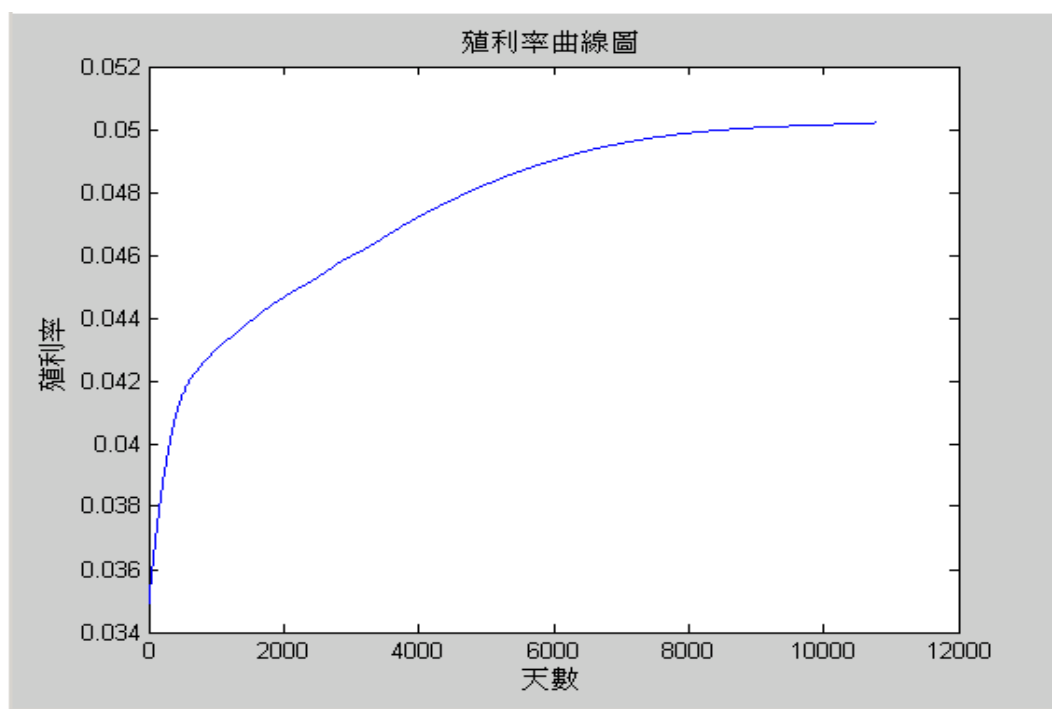


圖 4-2 校準後的直利率曲線

(二) 遠期利率

如同第三章，完成了殖利率曲線，接下來必需計算不同的遠期利率。利用無套利條件與(3.13)式，求出各個遠期利率的起始值。由於商品是十二年期，每天都需觀察三個月的 USD LIBOR，並且以三個月計息一次，因此，遠期利率的起始個數總共需要 $12 \times 360 = 4320$ 個，固需要計算出 $F(0,1,91)$ 、 $F(0,2,92)$ 、...、

$F(0,4320,4410)$ 等遠期利率的起始值。下面以一天後的三個月遠期利率 $F(0,1,91)$

說明：

$$F(0,1,91) = \frac{\left(\frac{91}{360} - \frac{0}{360}\right)F(0,0,91) - \left(\frac{1}{360} - \frac{0}{360}\right)F(0,0,1)}{\left(\frac{91}{360} - \frac{1}{360}\right)}$$

如上，在一天後的三個月遠期利率，是需要第 1 天及第 91 天的殖利率，因此經由殖利率曲線的建立，便可以一期一期求出所需要的三個月遠期利率。

(三) 波動度

在 BGM 模型下，經由 Brigo 及 Mercurio (2001) 推導後的遠期利率動態過程，除了起始值之外，還有遠期利率的波動度需要校準。事實上，當我們採用 BS 公式計算利率上限買權這個利率衍生性商品時，便已經隱含了遠期利率的波動度參數。由於利率上限買權的標的物為遠期利率，而且又有封閉解，因次我們將從利率上限買權著手。

市場上利率上限選擇權的報價，是以波動度的方式呈現，若需求得價格，只要套入 BS 公式即可。下表為 2005/07/25 利率上限選擇權報價：

表 4-5 2005 年 7 月 14 日利率上限選擇權的市場報價

年期	波動度(%)	年期	波動度(%)
ICUSF1Y	13.39	ICUSF6Y	20.89
ICUSF2Y	17.55	ICUSF7Y	20.79
ICUSF3Y	19.44	ICUSF8Y	20.55
ICUSF4Y	20.45	ICUSF9Y	20.24
ICUSF5Y	20.83	ICUSF110	19.89

然而，市場上並沒有個期利率上限買權的報價，只有「利率上限選擇權」的報價，所以必須透過市場上「利率上限選擇權」的報價與「利率上限買權」的評價關係來決定。

利率上限選擇權經過拆解之後，實為一系列的利率買權之組合，而每一個利率上限買權價格，都可透過 BS 公式求得，加總以後可得利率上限選擇權的理論價格，如(3.14)式與(3.15)式。將波動度帶入利率上限選擇權且透過理論價格等於市場價格，我們可以求得利率上限買權(亦即遠期利率)波動度。

在校準波動度之前，本文選用 Brigo 與 Mercurio 的第三種型態為波動度結構，亦即 S_k 型態。

基於市場資料不足，本文假設區間落在一年內的遠期利率波動度相同，亦即 $F(0,1,91)$ 、 $F(0,2,92)$ 、...、 $F(0,270,360)$ 的波動度相同，區間落在兩、三年者等也個別假設相同；這樣簡化的設定加上利率上限選擇權以 90 天為付息日，讓本文只需要算出六個月一期的遠期利率波動度即可，如 $F(0,90,180)$ 、 $F(0,180,360)$ 、...等。在加上第三種波動度結構，可以知道隨著時間經過，在做遠期利率的模擬時，只需考慮一個固定的波動度。另外，利率上限選擇權的計息是採先設定後支付的形式，因此一年期的利率上限選擇權，會有三個利率上限買權；兩年期會有七個利率上限買權，以此類推。

假設 $v_{T_{i-1}-caplet}$ 為 $F(0, T_{i-1}, T_i)$ 的波動度，則對於所有區間 $(T_{i-1}, T_i]$ 落在 $(0, 1]$ 、 $(1, 2]$ 、...、 $(11, 12]$ 的遠期利率波動度都假設為相等，分別定義為 s_1 、 s_2 、...、 s_{12} ；再假設到期日為 T_i 的利率上限選擇權的市場報價波動度為 $v_{T_{i-1}-cap}$ ，則 T_j 年期利率上限選擇權價格的計算方式可分為兩種：

1. 市場價格

透過帶入市場波動度報價得：

$$Cap^{MKT}(t, T_j, K) = \sum_{i=1}^j \delta_i P(t, T_i) BS(F_i(t), K, \sqrt{T_{i-1}} v_{T_j-cap}) \quad (4.1)$$

其中

$$BS(F(t), K, \sigma) = F(t)N(d_1) - KN(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(F(t)/K) + 0.5\sigma^2}{\sigma}, \quad d_2 = d_1 - \sigma$$

2. 理論價格

$$Cap(t, T_j, K)$$

$$= \sum_{i=1}^j Caplet(t, T_{i-1}, T_i, K) \quad (4.2)$$

$$= \sum_{i=1}^j \delta_i P(t, T_i) BS(F_i(t), K, \sqrt{T_{i-1}} v_{T_i-caplet})$$

令(4.1)等於(4.2)式，在各參數 δ_i 、 $P(t, T_i)$ 、 $F_i(t)$ 、 K 、 v_{T_j-cap} 皆已知的情況下，求解得 $v_{T_i-caplet}$ ，也就是遠期利率的波動度。注意 N 年期利率上限選擇權是以同年期交換利率 $S_{0,N}(t)$ 當作履約價 K 。以下以一年期的利率上限選擇權為例，說明如何求出落於 $(0, 1]$ 的遠期利率波動度。

利用(4.1)式等於(4.2)式：

$$P(0, 0.5)(0.25)BS(F_{0.5}(0), K_1, \sqrt{0.25}v_{1-cap}) + P(0, 0.75)(0.25)BS(F_{0.75}(0), K_1, \sqrt{0.5}v_{1-cap})$$

$$+ P(0, 1)(0.25)BS(F_1(0), K_1, \sqrt{0.75}v_{1-cap})$$

$$= P(0, 0.5)(0.25)BS(F_{0.5}(0), K_1, \sqrt{0.25}v_{0.25-caplet}) + P(0, 0.75)(0.25)BS(F_{0.75}(0), K_1, \sqrt{0.5}v_{0.5-caplet})$$

$$+ P(0, 1)(0.25)BS(F_1(0), K_1, \sqrt{0.75}v_{0.75-caplet})$$

其中 $K_1 = S_{0,1}(0)$ 表示一年期的交換利率且假設同一區間的波動度相同，即

$v_{0.25-caplet} = v_{0.5-caplet} = v_{0.75-caplet} = s_1$ ，便可求出在 $(0, 1]$ 區間的遠期利率波動度 s_1 。

因為市場上只提供一年期至十年期的利率上限選擇權報價，加上利率波動度結構越往長天期越趨於平緩，所以假設十年以上利率波動度與第九年到第十年的波動度相等。表 4-6 為校準出來的波動度期間結構：

表 4-6 校準完成波動度結構

年期	波動度(%)	年期	波動度(%)
1Y	13.39	6Y	20.18
2Y	12.26	7Y	19.99
3Y	16.07	8Y	19.37
4Y	19.20	9Y	18.57
5Y	20.12	10Y	17.77

(四) 相關係數

各個遠期利率是有相關性的，本文共需模擬 4320 個遠期利率。然而如此龐大的相關係數矩陣是難以建立的，因此本文採用分組相關，以互相有關聯的遠期利率為一組，如下表所示：

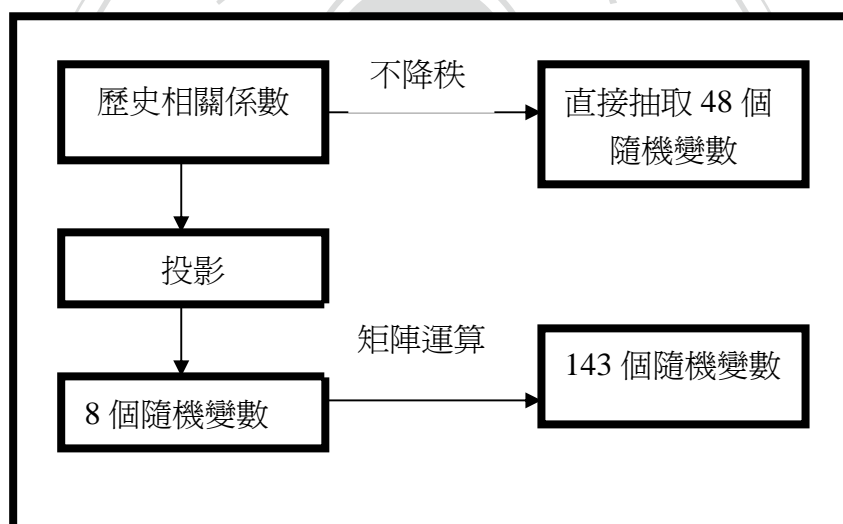
表 4-7 遠期利率分組

組別	遠期利率 48 個一組			
1	$F(0,1,91)$	$F(0,91,181)$...	$F(0,4231,4321)$
2	$F(0,2,92)$	$F(0,92,182)$...	$F(0,4232,4322)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
90	$F(0,90,180)$	$F(0,180,270)$...	$F(0,4320,4410)$

由上表可知須找出九十組相關係數矩陣，但為求簡化，本文僅找出第一組的相關係數矩陣，並假設這九十組有相同的相關係數矩陣。

本文選用從 2005/1/14 到 2005/7/14 共 180 天的歷史資料計算相關係數矩陣。但在上段提及每組有 48 個遠期利率，因此在模擬時需要抽取 48 個隨機變數。然而此數目對於每天都需要觀察，共計十二年的本商品過於沉重，因此本文利用第三章 Wigel 提出的「投影」將至數降為 8，以其能抽取 8 個隨機變數，再經由矩陣運算，得到 48 個具有相關的隨機變數。以下為相關係數降秩的示意流程圖：

圖 4-3 相關係數矩陣降秩流程圖



矩陣運算其中一個重點是 Cholesky 分解，因為相關係數矩陣為對稱矩陣，故經由 Cholesky 分解可得一組互為對稱的上三角矩陣與下三角矩陣且此相關係數矩陣為兩者乘積。以符號表示為 $\rho = AA^T$ 。由於相關係數矩陣為 48×48 ，經拆解後的下三角矩陣，在與獨立的隨機向量 $X = [X_1, X_2, \dots, X_{48}]$ 相乘，便得具有相關性的 48 個隨機變數。

如前所述，每日需抽取 48 個隨機變數，共計十二年，加上共有九十組需要模擬，抽樣數目太大，固須經過降秩。經由「投影」降秩後的矩陣雖仍為 48×48 大小，但秩數已經降至 8，所以在經過 Cholesky 分解後的下三角矩陣，只有前八行的數值明顯大於 0，我們將趨近於 0 的行捨去，便得一 48×8 的矩陣，再乘以獨立的隨機向量 $X' = [X'_1, X'_2, \dots, X'_8]$ 可得相關的 48 個隨機變數。至此我們已將每日需抽取的 48 個相關隨機變數，改為抽取 8 個獨立的隨機變數。

需要注意的是，在做 Cholesky 分解時，相關係數矩陣除了對稱，尚需滿足正定的特性，因此 Wigle 提出的投影方法，不只將原相關係數矩陣降秩，且將之調整成正定。而改良後的秩數為 8 的相關係數矩陣，與原來相關係數矩陣的誤差，也就是兩者相減的 Fobenius Norm 已經低於 0.01。

(五) BGM

做完(一)~(四)的參數校準後，接下來進入遠期利率的模擬，本文將採用 Q^i 測度下的遠期利率 $F_k(t)$ 的動態過程，亦即(3.16)式：

$$i < k, t \leq T_i$$

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\rho_{k,j}\delta_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1+\delta_jF_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t)dW_k^i(t) \quad (4.3)$$

利用 Ito Lemma 運算可得：

$$d \ln F_k(t) = \sigma_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\rho_{k,j}\delta_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1+\delta_jF_j(t)} dt - \frac{\sigma_k(t)^2}{2} dt + \sigma_k(t)dW_k^i(t) \quad (4.4)$$

再利用尤拉及米斯坦定理(Euler and Mulstein Schemes)進行斷續化(Discretization)得：

$$\ln F_k(t + \Delta t) = \ln F_k(t) + \sigma_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\rho_{k,j}\delta_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1+\delta_jF_j(t)} \Delta t - \frac{\sigma_k(t)^2}{2} + \sigma_k(t)(W_k^i(t + \Delta t) - W_k^i(t))$$

如此便可模擬出未來十二年，每日三個月期的遠期利率。

(六) LSM

一般而言，最小平方蒙地卡羅法是以投資人的觀點出發透過比較「履約價值」與「內含價值」來決定與否。本產品確是發行商有可贖回條款，且到期時需還本給投資人，因此，從發行商的角度來看，需比較「現在贖回」與「之後贖回」哪個所需花費的金額較少，若現在贖回的金額較少，則選擇現在贖回；若之後贖回的金額較少，則此時點不贖回，因此在平價本商品之前，需先決定各時點的「贖回價值」與「不贖回價值」。

若在 t 時點決定贖回，則需支付的金額是已知的 100% 本金 N ，所以各時點的贖回金額 $CV_t = N$ ；在 t 時點不贖回的價格 UCV_t 實際上是不可知的，需要用回歸的方式求得。首先定義在一條模擬路徑上， t 時點的持有價值 UCV_t 為未來各期現金流量的折現，亦即 $UCV_t = \sum_{i=t}^T CF_i + DF_i$ ，其中 CF_i 表示第 i 期的現金流量， DF_i 表示由 i 時點至 t 時點的折現因子。在模擬 n 條路徑之後，每個時點會有 n 個持有價值，本文選擇當期美元三個月 LIBOR 與前期美元三個月 LIBOR 做為解釋變數，以此做回歸，如下式：

$$UCV_t = [1 \quad F_t(t) \quad F_{t+1}(t)] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

如此在各時點便可由美元三個月 LIBOR 與前期美元三個月 LIBOR 估計出該時點不贖回的價值(持有價值)。藉此求得最適履約法則矩陣，再依此折現平均，即得本產品的模擬價格。

本文另外採用了 Lnostaff 與 Schwartz 建議具有權重的 Lagurre 多項式當作回歸式中的基本函數，即(3.19)式取 $n = 3$ ，與一次多項式比較結果如下：

表 4-8 兩種基本函數的比較

	一次多項式函數	具全重 Lagurre 多項式
債券價格	9621.0	9641.40667

由上表可知一次多項式與具權重的 Lagurre 多項式所算出的債券價格差別不大，但是由於美式選擇權的價格是在決定一個履約法則使得美式選擇權的價值最高。因此在這裡我們認為一次多項式所模擬出的結果較接近真實債券的價格。

第五節 模擬結果

本產品的計息方式是視每 90 天內，美元三個月期利率落在設定區間的天數。配息之計算方式舉例而言：假設本債券第 6 期收益計算期間內，觀察日指標利率落入該期區間之觀察日天數為 N ，當期收益期間總天數為 M ，第 5 期的年化收益率為 6.8%，擇投資人第 6 期之配息為：投資本金 $\times(6.8\% \times N/M) \times 90/360$ 。本例共模擬 10,000 條路徑，每條路徑含 48 個計息觀察日。

本產品發行面額為 10,000 美元，發行價使用百分之百面額計算，用 10,000 條路徑模擬出的結果為 9,621.0 美元；在不考慮發行商可贖回的情況下，純債券價格為 9,699.6 元，因此本產品的贖回價值為 $9,699.6 - 9,621 = 78.6$ 美元，也就是每張票券的選擇權價值為 78.6 美元。另外，在 10,000 調模擬中運用最小平方蒙地卡羅法，有 3,038 次發行商沒有執行贖回權。

以手續費採 0.5% 計算，發行商每張票券可得 $(10,000 - 9,621) + 10,000 \times 0.5\%$
= 429 美元的利潤，且該發行商總共發行了 $\frac{6,420,000}{10,000} = 642$ 單位，因此發行商的
總利潤為 $642 \times 429 = 275,418$ 美元。每單位的 12 年總利率為 $\frac{429}{9621} = 4.459\%$ ，所以
每年每單位的平均酬率為 $\sqrt[12]{1.0459} - 1 = 0.3747\%$ 。

就模擬的結果，約有 30.38% 的債券持續到期滿才贖回，54.26% 的債券
在第十期至第二十期之間(含)被贖回，兩者相加佔 84.64%。表示在期初和第二十
一期至期末之間，發行商贖回的機率較低，也就是若在第二十一期以前未被贖回
的話，發行商認為越晚贖回越有利。

由於發行商研判利率將持續走低，本產品已於 2009 年 1 月 14 日提前贖回，
共配息 14 次，累積配息 9.0555%。投資人雖面臨再投資的情況，但是收益已明
顯高於當時定存。

第六節 敏感度分析

(一) *Delta*

避險參數 *Delta* 指的是滿單位標的物的變動，造成商品價格變動的多寡。就
本商品而言，是指整條殖利率曲線平移後，與商品價值變動的比。本文使用有效
存續時間(Effective Duration)的概念(陳松男，利率金融工程學)，即：

$$Delta = \frac{[V(r + \Delta r) - V(r)] + [V(r) - V(r - \Delta r)]}{2V(r)\Delta r}$$

將殖利率整個平移 10bp，亦即 $\Delta r = 10bp$ ，會造成票券價值變動多少。以下為變
動結果：

表 4-9 Delta

$V(r + \Delta r)$	9,532.9
$V(r)$	9,621.0
$V(r - \Delta r)$	9,733.2
<i>Delta</i>	-0.1041%

上表呈現若殖利率變高則票券價格會降低的常識，也就是整個殖利率若上升 1bp，會早成票券下降 0.1041%，反之亦然。若殖利率有平移的現象，可根據這個數值做 Delta 避險，例如當觀察到殖利率曲線整個往上平移 1bp 時，最簡單的方法是從市場上反向操作買回此票券。

(二) Gamma

避險參數 *Gamma*，代表標的物輕微的變化量與 *Delta* 變化量的比。此處指的是殖利率曲線平移後，造成 *Delta* 多少的變動。本文使用有效凸性風險(Effective Convexity)的概念(陳松男，利率金融工程學)，即：

$$\begin{aligned}
 \text{Gamma} &= \frac{\text{Delta}(+\Delta r) - \text{Delta}(-\Delta r)}{\Delta r} \\
 &= \frac{\frac{V(r + \Delta r) - V(r)}{V(r)\Delta r} - \frac{V(r) - V(r - \Delta r)}{V(r)\Delta r}}{\Delta r} \\
 &= \frac{V(r + \Delta r) - 2V(r) + V(r - \Delta r)}{V(r)(\Delta r)^2}
 \end{aligned}$$

如同 Delta，讓殖利率曲線平移 10bp，也就是 $\Delta r = 10\text{bp}$ 。由表 4-7 可得 $\text{Gamma} = 0.00002505 = 0.2505\text{bp}$ ，也就是當利率上升 1bp 將造成 *Delta* 上升 0.2505bp，使得債券價格對利率的變動更加敏感，故本產品具有凸性性質。發行商若想採取動態避險，則必需將 *Gamma* 值考慮進去，隨時動態調整所需要的 *Delta* 值。

(三) Vega

避險參數 *Vega* 為波動度變化量與產品價格變化量的比。此處讓波動度期間結構整體移動 1%，觀察票券價值變動多少。如同 *Delta* 的算法，公式表示如下：

$$Vega = \frac{[V(\sigma + \Delta\sigma) - V(\sigma)] + [V(\sigma) - V(\sigma - \Delta\sigma)]}{2V(\sigma)\Delta\sigma}$$

表 4-10 *Vega*

$V(r + \Delta\sigma)$	9,535.1
$V(r)$	9,621.0
$V(r - \Delta\sigma)$	9,669.4
<i>Vega</i>	-0.6980%

由上表可知 $Vega = -0.6980\%$ ，表示波動度平移 1%，將造成票券價值反向變動 0.6980%。這是由於利率波動度越大，使利率較容易出現不穩定與飆高的現象，進而使得指標利率不易落入所設定的區間。所以以本債券的計息條件，波動度會對價格產生反向的影響。

(四) 改變利息與利率區間對債券的影響

若發行商提高利息 50bp，也就是將本債券第 1 年、第 4 年、第 7 年、第 10 年的年收益率提高 50bp，其他年年收益率的計算依舊維持前期收益率的話，合理的債券價格為 9879.1 美元，債券價格提高 $\frac{9879.1 - 9621}{9621} = 2.6827\%$ ；若是依照

前述方式將利息降低 50bp，合理的債券價格為 9453.3 美元，債券價格降低 $\frac{9621 - 9453.3}{9621} = 1.7431\%$ 。

若發行商將標的落入計算利息的區間加大 50bp，則模擬出合理的債券價格為 1,0084 美元，債券價格提高 $\frac{10084 - 9621}{9621} = 4.8124\%$ ；若將區間縮小 50bp，則模擬出的債券價格為 8800 美元，債券價格共下降 $\frac{9621 - 8800}{9621} = 8.5334\%$ 。顯示債券價格對標的落入計息的區間非常敏感，這也是由於債券每日計息的特色所致，即使是區間微小的變動，也會使標的落入計息區間的天數大幅增加或降低。

第七節 發行商策略與投資人策略

由於有提前贖回條款，發行商不太容易蒙受損失。在一般的情況下，發行商只需專注在預估 3-month USD LIBOR 的走勢，若情形不利則贖回；反觀投資人購買此商品處於被動的情況。除了首幾季容易獲得高報酬，投資人必須面對隨時被提早贖回的發生，或是 3-month USD LIBOR 走高而導致利息全無的風險，且在次級市場可能有流動性風險，所以可能適合想走短線投資人，能在頭幾季就獲得高利息。

第八節 本章小結

本章利用「12 年期美金計價『利率區間』連動債券」為例，從商品介紹、資料收集、參數校準等做了完整的說明。接著說明數值方法包含降秩與最小蒙地卡羅法，並模擬出債券的價格與贖回權的價格，最後在加上敏感度分析。另外，由模擬的結果得知發行商每單位可賺取 4.459% 的利潤，這可以視為投資人欲自行建構與「12 年期美金計價『利率區間』連動債券」相同的投資組合所需花費的交易成本。

第五章 十年期美元計價息滿到期反浮動利率連動債券

第一節 商品介紹

本文所評價的商品為「十年期美元計價息滿到期反浮動利率連動債券」。

(一) 產品說明書

表 5-1 十年期美元計價息滿到期反浮動利率連動債券

商品名稱	十年期美元計價息滿到期反浮動利率連動債券 (10 Year Accrual Cap Reverse-Floater Note)
發行機構	比利時國營儲蓄銀行 (Banque et Caisse d' Epargne Etat Luxembourg)
最小投資金額	10,000 美元
投資期間	10 年
連結標的	美元 6 個月期英國倫敦金融同業拆款利率 (6 MONTH USD LIBOR)
發行日	2003/7/25
起息日	2003/7/25
發行價格	100%
保本率	100%
票面利息	1. 2003/7/25-2004/7/25：7.00%年息 2. 2004/7/25-2013/1/25:Max【0，9.5%－(2× USD 6M LIBOR)】 年息 3. 2013/1/25-2013/7/25：(13%－本債券以配發之總利息)
利息支付	半年支付
贖回條款	本債券自計息起，每半年所配利息累計達 13%
手續費	1.5%

(二) 產品特色

本產品如同第四章為利率連動債券，主要特色有對 6M USD LIBOR 的看法、保本且保息。

如果 6M USD LIBOR 保持在低水準，則投資人可望在短期內獲取高額報酬，但是每半年計息的特色，讓投資人可能在利率保持低水準的時期，但由於計息基準日的連動標的飆高，導致該期的票面利息下降。在 2004/7/25-2013/1/25 期間，若是計息基準日 6M USD LIBOR 高於 4.75%，甚至會導致投資人在該期全無利息。

在最糟的情況，也就是利率不如預期大幅走高，投資人也能在第一年獲得 7.00% 的年息，且確保在最後能拿到 13% 的總配息加上本金。保本與保息的特色讓投資人有些許的保障，最大的損失為利息的機會成本。不論提前贖回或到期滿贖回，投資人都可獲得 13% 的總配息。

第二節 情境分析

(一) 利息上升

若 USD 6M LIBOR 飆高，除了在第一年投資人能拿到 7% 的年息，在第二年到第九年又六個月依照債券的票面利息【 $0, 9.5\% - (2 \times \text{USD } 6\text{M LIBOR})$ 】，投資人勢必拿到較低的利息，但在最後半年投資人可保證拿到總共 13% 的累積配息。以極端的狀況來看，若每日 USD 6M LIBOR 高於 4.75%，即除了頭兩期付 7% 的年息外，發行商到最後一期才支付 $\frac{1300 - 700}{10000} \times 2 = 12\%$ 的年息，以期初的時點來看，發行商享有

$$10,000 - 10,000 \left[\frac{7\% \times 0.5}{(1 + 0.0112)^{180/360}} + \frac{7\% \times 0.5}{(1 + 0.0121)^{360/360}} + \frac{1 + 12\% \times 0.5}{(1 + 0.0478)^{360/360}} \right]$$

=2,661.2 美元的利潤。一般來說，這些債券價格都是很低的。

(二) 利息下降

若 USD 6M LIBOR 走低，投資人可以在首幾期拿到高額配息，但也加速累積總配息使得債券提前被贖回。以發行商來說在最遭的情況，也就是再第三個付息日付 9.5% 的年息，在第四個付息日付 2.5% 的年息，則此時債券在期初的價格為

$$10000 * \left[\frac{7\% \times 0.5}{(1+0.0112)^{180/360}} + \frac{7\% \times 0.5}{(1+0.0121)^{360/360}} + \frac{9.5\% \times 0.5}{(1+0.014)^{540/360}} + \frac{1+2.5\% \times 0.5}{(1+0.0168)^{720/360}} \right]$$

= 10952.2，已經高過發行價格。

(三) 利息上升接近 4.75% 但未超過

此時依照債券票面利息【0, 9.5% - (2 × USD 6M LIBOR)】，投資人只能拿到低利息，類似第一種情況，投資人只能在最後一期拿到 13% 的總配息。

第三節 評價

本商品評價如同第四章，先對市場資料進行利率模型參數的校準，在完成了殖利率曲線與遠期利率後，接著是波動度結構與係數矩陣，最後由蒙地卡羅法完成模擬。

(一) 殖利率

在發行日 2003/7/25 當天，交換利率與 LIBOR 的市場報價分別列於表 5-2 與表 5-3。

表 5-2 2003 年 7 月 25 日交換利率的市場報價

年期	交換利率(%)	年期	交換利率(%)
1y	1.197	8y	4.16
2y	1.667	9y	4.345
3y	2.299	10y	4.5045
4y	2.849	12y	4.757
5y	3.305	15y	5.01
6y	3.655	20y	5.2345
7y	3.935	30y	5.33

表 5-3 2003 年 7 月 25 日 LIBOR 的市場報價

到期	LIBOR(%)
6m	1.12375
12m	1.21

首先進行殖利率曲線的估計，如(3.12)式：

$$S_{0,N}(t) \delta \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{(1+F(t,t,T_i))^{\delta i}} + \frac{1}{(1+F(t,t,T_{N+1}))^{\delta(N+1)}} = 1 \quad (5.1)$$

用拔靴法利用市場上已知的交換利率與即期利率，求出下一期的即期利率。一樣在(5.1)式中交換利率並沒有充裕的報價資訊，所以在進行殖利率校準之前，必須先用非線性內插法(Cubic Spline)插補出需要的交換利率。

結束交換利率的插補後，經由(5.1)式，便可以完整描繪出 2003/7/25 當天的每六個月殖利率曲線。

經由市場資訊求得每六個月的殖利率曲線後，做每天插補的動作，即完成每天的殖利率曲線。因此，在這一步驟，將得到 $F(0,0,1)$ 、 $F(0,0,2)$ 、...、 $F(0,0,10800)$ 共 $30 \times 360 = 10800$ 個殖利率，圖 5-1 為校準完成的殖利率曲線。

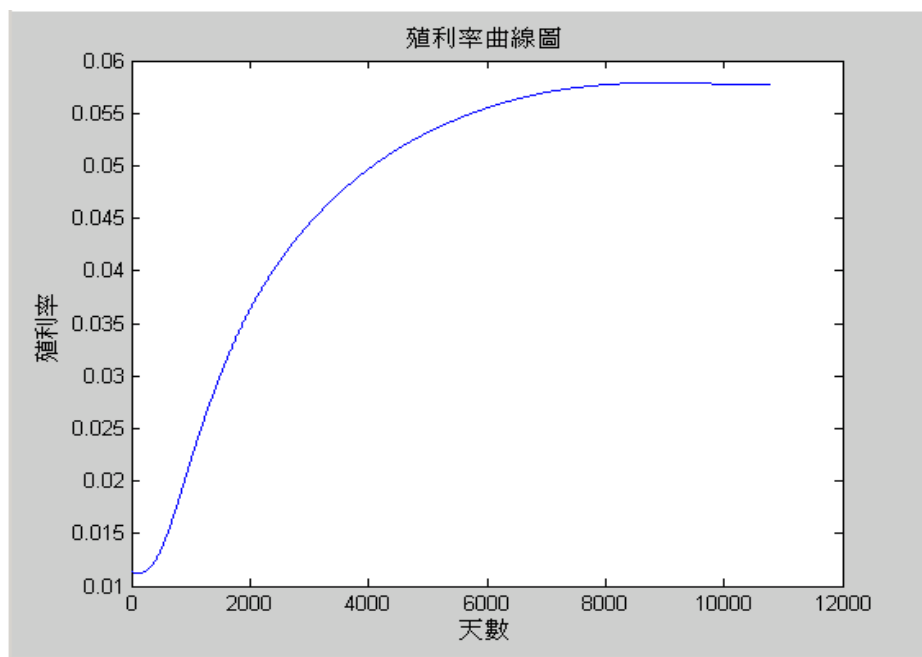


圖 5-1 校準後的直利率曲線

(二) 遠期利率

完成了殖利率曲線，接下來必需計算不同的遠期利率。利用無套利條件與 (3.13) 式，求出各個遠期利率的起始值。本商品是十年期，每六個月計息一次，因此，遠期利率的起始個數總共需要 $10 \times 360 = 3600$ 個，固需要計算出 $F(0,1,181)$ 、 $F(0,2,182)$ 、...、 $F(0,3600,3780)$ 等遠期利率的起始值。

(三) 波動度

如同第四章首先蒐集市場上利率上限選擇權的報價。下表為 2003/07/25 利率上限選擇權報價：

表 5-4 2003 年 7 月 25 日利率上限選擇權的市場報價

年期	波動度(%)	年期	波動度(%)
ICUSF1Y	35.62	ICUSF6Y	32.4484
ICUSF2Y	44.37	ICUSF7Y	30.17
ICUSF3Y	43.94	ICUSF8Y	28.3764
ICUSF4Y	39.21	ICUSF9Y	26.9393
ICUSF5Y	35.34	ICUSF110	25.73

選用第三種型態的波動度結構，如第四章令理論價格等於市場價格，即(4.1)式等於(4.2)式，再令同年期的波動度相等，可得以半年為期的利率上買權波動度 $v_{T_i-\text{caplet}}$ 。表 5-5 為校準完成的波動度：

表 5-5 校準完成波動度結構

年期	波動度(%)	年期	波動度(%)
1Y	35.68	6Y	24.88
2Y	40.64	7Y	23.19
3Y	37.41	8Y	21.80
4Y	30.21	9Y	20.68
5Y	27.13	10Y	19.63

(四) 相關係數

本文共需模擬 3600 個遠期利率，在此採用分組相關，以互相有關聯的遠期利率為一組，但注意與第四章不同的是，因為模擬的是十年期且連接標的是 6M USD LIBOR，遠起利率以 20 其為一組共 180 組，如下表所示：

表 5-6 遠期利率分組

組別	遠期利率 20 個一組			
1	$F(0,1,181)$	$F(0,181,361)$...	$F(0,3421,3601)$
2	$F(0,2,182)$	$F(0,182,362)$...	$F(0,3422,3602)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
180	$F(0,180,360)$	$F(0,360,540)$...	$F(0,3600,3780)$

由上表可知須找出 180 組相關係數矩陣，本文僅找出第一組的相關係數矩陣，並假設這 180 組有相同的相關係數矩陣。

本文選用從 2003/1/25 到 2003/7/25 共 180 天的歷史資料計算相關係數矩陣。由表 5-5 可知模擬時需抽取 20 個相關的隨機變數，在此利用第三章 Wigel 提出的「投影」將至數降為 8，達到只需能抽取 8 個獨立的隨機變數，再經由矩陣運算，得到 20 個具有相關的隨機變數。

(五) BGM

做完(一)~(四)的參數校準後，接下來進入遠期利率的模擬，這裡也採用 Q^i 測度下的遠期利率 $F_k(t)$ 的動態過程：

$$i < k, t \leq T_i$$

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\rho_{k,j}\delta_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1+\delta_jF_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t)dW_k^i(t) \quad (5.2)$$

再如第四章經由斷續化得：

$$\ln F_k(t + \Delta t) = \ln F_k(t) + \sigma_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\rho_{k,j}\delta_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1+\delta_jF_j(t)} \Delta t - \frac{\sigma_k(t)^2}{2} + \sigma_k(t)(W_k^i(t + \Delta t) - W_k^i(t))$$

如此便可模擬出未來十年，每日的 6M USD LIBOR。

第四節 模擬結果

本產品為半年付息，以付息日前五天的 6M USD LIBOR 做為付息基準。本產品發行面額為 10,000 美元，發行價使用百分之百面額計算，用 5,000 條路徑模擬出的結果為 9820.4 美元；在 5000 條模擬路徑中，有 1,211 次為到期贖回。

以手續費 1.5% 計算，發行商每張票券可得 $(10,000 - 9,820.4) + 10,000 \times 1.5\% = 329.6$ 美元的利潤，且該發行商共發行 $\frac{4,000,000}{10,000} = 400$ 單位，因此發行商總利潤為 $400 \times 9820.4 = 131,840$ 美元。每單位的 10 年總利率為 $\frac{329.6}{9820.4} = 3.356\%$ ，每年每單位的平均報酬率為 $\sqrt[10]{1.03356} - 1 = 0.3306\%$ 。

在 5000 次的模擬中，有 3007 次是在第四期至第七期當中贖回，顯示在當時利率不高的情形下，投資人很有可能在短期內獲取高額利息。另外有 1,211 次直到期末才贖回，表示在前十九期的累積配息未達 13%。

本產品在首兩季高額利息後，隨著利率逐漸升高而使得配息逐漸下降，再金融風暴後配息又逐漸上升，並於 2009 年 2 月 2 日累計滿 13% 利息且提前贖回，共配息 11 次。

第五節 敏感度分析

(一) *Delta*

如同第四章採用有效存續時間：

$$\Delta = \frac{[V(r + \Delta r) - V(r)] + [V(r) - V(r - \Delta r)]}{2V(r)\Delta r}$$

以下為變動結果：

表 5-7 Delta

$V(r + \Delta r)$	9,500.8
$V(r)$	9,820.4
$V(r - \Delta r)$	9,821.0
<i>Delta</i>	-0.1630%

$Delta = -0.1630\%$ 表示利率變動 1bp 將導至債券價格反向變動 0.1630%。這是由於殖利率上升，依照本債券的票面利息【0，9.5% - (2× USD 6M LIBOR)】將導致投資人的利息收入下降，且折現因子變大使得債券價格降低。

(二) *Gamma*

這裡一樣使用有效凸性風險的概念：

$$\begin{aligned}
 Gamma &= \frac{Delta(+\Delta r) - Delta(-\Delta r)}{\Delta r} \\
 &= \frac{\frac{V(r + \Delta r) - V(r)}{V(r)\Delta r} - \frac{V(r) - V(r - \Delta r)}{V(r)\Delta r}}{\Delta r} \\
 &= \frac{V(r + \Delta r) - 2V(r) + V(r - \Delta r)}{V(r)(\Delta r)^2}
 \end{aligned}$$

由表 5-6 得知 $Gamma = -0.03248\% = -3.248 \text{ bp}$ 。表示當殖利率曲線平移 1bp，造成整個 Delta 值反向變動了 3.248bp，所以本商品具負凸性性質，發行商的風險與利率變動成反向關係，也就是債券價格對利率的變動較不敏感。

(三) Vega

Vega 以下面公式計算：

$$Vega = \frac{[V(\sigma + \Delta\sigma) - V(\sigma)] + [V(\sigma) - V(\sigma - \Delta\sigma)]}{2V(\sigma)\Delta\sigma}$$

表 5-8 Vega

$V(r + \Delta\sigma)$	9,798.1
$V(r)$	9,820.4
$V(r - \Delta\sigma)$	9,841.1
Vega	-0.2189%

由上表可知 $Vega = -0.2189\%$ ，表示波動度上升，將造成債券價格下降。這是因為波動度升高，可能使利率不穩定飆高，使得在計息條件為

【0，9.5% - (2× USD 6M LIBOR)】下，容易得到較低的利息，導致債券價格下降。Vega 不如「12 年期美金計價『利率區間』連動債券」明顯是由與本債券並非每日記息，利率的波動度對債券的價格影響較低。

(四) 改變利息或累積贖回的利率

若發行商提高利息 50bp，也就是首兩期票面利息為 7.5%、3-19 期票面利為【0，10% - (2× USD 6M LIBOR)】、第 20 期票面利息維持不變的話，經由模擬出的合理價格為 10090.3 美元，債券價格提高 $\frac{10090.3 - 9820.4}{9820.4} = 2.7484\%$ ；若依

照前述方式將利息降低 50bp，則債券價格為 9438.7 美元，下降

$$\frac{9820.4 - 9438.7}{9820.4} = 3.8868\%。$$

若發行商將累積贖回的利息上升 50bp，也就是當利息累積到 13.5% 的時候才將債券贖回，經由模擬出來的債券價格為 9626.3 美元，下降

$\frac{9820.4 - 9626.3}{9820.4} = 1.9765\%$ ；若將累積贖回的利息下降 50bp，模擬出的債券價格為 9908.0 美元，上升 $\frac{9908 - 9820.4}{9820.4} = 0.89202\%$ 。這是因為當累積贖回的利息上

升時，使得債券贖回時點後移，在前期利率普遍低於後期利率的情況下，折現後的債券價格呈現越晚贖回債券價格越低的情況，反之亦然。

第六節 發行商策略與投資人策略

這種債券端看投資人與發行商對利率的走勢的看法，以投資人而言，約有 6 成的機會在第四期到第七期之間達到 13% 的高額累積利息，但是也有約 2 成 5 的機會到期末才得到 13% 的累積配息。此債券不論是對發行商還是投資人皆是高風險且高報酬，惟有對利率走勢判斷準確的人較容易獲利。

第七節 本章小結

如同第四章本章以「十年期美元計價息滿到期反浮動利率連動債券」為例，詳細介紹了評價的過程並加上敏感度分析。但藉由不同的票面利息與贖回方式，讓評價的技巧更完善。投資人與發行商可以本文的模擬結果做為投資或發行的參考。評價過程中多次模擬利率的走勢也可幫助投資人了解各期的贖回機率，做好再投資的準備。

第六章 結論與建議

本文提供有具理論基礎且有系統的方法評價兩種具不同提前贖回條款的債券。包括模型的選用、資料搜集、參數校準、數值方法到最後的敏感度分析。評價結果可做為發行商與投資人的參考依據。

而本文對避險參數的計算過於簡化，在 Delta、Gamma 與 Vega 的計算上，都是觀察殖利率與波動度整體平移的情況，非平移的殖利率與波動度期間結構都沒有在本文考慮之中，因此建議可以使用 Pathwise Delta 與 Likelihood Delta (Malliavin and Thalmaier, Computation of Greeks and Integration by Part Formula)來求算避險參數，使得評價更加完善。

另外，關於波動度結構，本文採用較簡易的區間常數假設去操作。但實際上，跟股權選擇權一樣，市場上遠期利率的波動度一樣具有微笑波幅曲線的特性，因此在未來的評價上面，可以參考 Brigo 與 Mercurio(2000)、Hagan(2002)等人在微笑波幅和隨機波動度的文章。

參考文獻

- [1] L. Anderson, and J. Andreasen, Volatility Skews and Extensions of the Libor Market Model, *Applied Mathematical Finance*, **7**, 1-32 (2000).
- [2] F. Black, E. Derman, and W. Toy, A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options, *Financial Analysts Journal*, **3**, 24-32 (1990).
- [3] A. Brace, D. Gatarek and M. Musiela, The Market Model of Interest Rate Dynamics, *Mathematical Finance*, **7**, 127-155 (1997).
- [4] J. C. Cox, J. E. Ingersoll and S. A. Ross, A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, **53**, 385-407 (1985).
- [5] P. S. Hagan, D. Kumar, A. S. Lesniewski, D. E. Woodward, Managing Smile Risk, *Working papper*, (2002).
- [6] D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton, Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **25**, 419-440 (1990)
- [7] J. Hull and A. White, Pricing Interest-Rate Derivative Securities, *The Review of Financial Studies*, **3**, 573-592 (1990).
- [8] J. Hull and A. White, Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and Implementation of the LIBOR Market Model, *The Journal of Fixed Income*, **10**, 46--62 (2000).
- [9] T. S. Y. Ho, S. B. Lee, Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *Journal of Finance*, **41**, (1986).
- [10] F. Jamshidian, LIBOR and Swap Market Models and Measures, *Finance and Stochastics*, **1**, 293-330 (1997)

- [11] A. Kawai, Analytical and Monte Carlo Swaption Pricing under the Forward Swap Measure, *Journal of Computational Finance*, **6**, 101-111 (2002)
- [12] F. A. Longstaff, and E. S. Schwartz, Valuing American Options by Simulation : a Simple Least-Square Approach, *The Reviews of Financial Studies*, **14**, 113-147 (2001).
- [13] V. V. Piterbarg, Computing Deltas of Callable Libor Exotic in Forward Libor Models, *Journal of Computational Finance*, **7**, 107-144 (2004).
- [14] Vasicek, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, **5**, (1997).
- [15] P. Weigel, Optimal Calibration of LIBOR Market Models to Correlations, *The Journal of Derivatives*, **12**, 43-50 (2004).
- [16] 陳松男，利率金融工程學，新陸書局，2006。
- [17] 蔡宗儒，LIBOR 新奇選擇權之評價---以最小平方蒙地卡羅法為例，國立政治大學碩士論文 (2006)。