國立政治大學應用數學系

碩士學位論文

指導教授：李陽明博士

不盡相異物的環狀排列公式

A Formula on Circular Permutation of Nondistinct Objects

碩士班學生：王世勛 撰

中華民國九十九年六月二十九日

摘　要

n 個物品之直線排列數與環狀排列數有對應關係，一般而言，具有 K-循環節的直線排列之所有情形數若爲 S，則 $\frac{S}{K}$ 即爲所對應的環狀排列數，亦即每 K 種直線排列對應到同一種環狀排列。本文將直線排列之所有情形依所具有的 K-循環節之類別做分割，並導出具有 K-循環節之直線排列之所有情形數之計數公式，假設直線排列依 K_1-循環節，K_2-循環節，⋯，K_n-循環節分類依序有 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 種不同排列情形，則所有的環狀排列數 $= \frac{S_1}{K_1} + \frac{S_2}{K_2} + \cdots + \frac{S_n}{K_n}$。

Abstract

There exists a correspondence between ordered arrangements and circular permutations. Generally speaking, suppose the number of ordered arrangements with K-recurring periods is S, then the number of circular permutations is $\frac{S}{K}$, namely we may assigne each K cases of ordered arrangements with K-recurring periods to a case of circular permutations. This article partitions the total cases of ordered arrangements with indistinguishable objects by means of the different catagories of K-recurring periods and derives a formula to calculate the total number of ordered arrangements with K-recurring periods. Suppose the number of ordered arrangements with K_1-recurring periods、K_2-recurring periods、$\cdots$、K_n-recurring periods is $S_1, S_2, \cdots, S_n$ respectively, then the total number of circular permutations is $\frac{S_1}{K_1}+\frac{S_2}{K_2}+\cdots+\frac{S_n}{K_n}$.

目　　　錄

第一章　緒論

本文藉由直線排列循環節之循環排列與環狀排列之對應來找出不盡相異物之環狀排列之計數公式，第二章介紹直線排列可能產生循環節之情況及 K-循環節之定義，第三章探討直線排列可能之循環節個數，第四章介紹直線排列循環節之循環排列與環狀排列之對應關係，第五章介紹直線排列循環節之子循環節個數之所有可能，第六章由排容原理導出直線排列不產生子循環節之循環節個數之計數方法，第七章使用加法原理將各種情況加總而得到不盡相異物之環狀排列計數公式，第八章介紹關於這個主題之回顧及展望。

第二章 直線排列之 K-循環節

物品作直線排列有可能出現循環節(如 abcabcabc 中出現 abc 循環節),以 111122 作直線排列爲例,共有 15 種情形如下，其中有 3 種產生循環節(**粗體字**)

111122	111221	121211
111212	112121	**211211**
112112	**121121**	122111
121112	211121	212111
211112	112211	221111

如果直線排列可由直線排列中之最小單位複製而成,我們賦予這個最小單位一個特別的名稱(K-循環節),要研究環狀排列需先了解 K-循環節。

定義 2.1:排成一列的物品若由 K 個物品複製 t 次構成，若 t 爲最大值，稱此 K 物品爲一循環節，簡稱 K-循環節。

例 2.1：22222222 由 1-循環節 2 複製 8 次構成

121212121212 由 2-循環節 12 複製 6 次構成

112112112112 由 3-循環節 112 複製 4 次構成

1234567 由 7-循環節 1234567 複製 1 次構成。

定理 2.1:循環節內不會再有子循環節。

證明：

假設排成一列的物品由 K-循環節複製 t 次構成，t 爲最大值，若 K-循環節有 s 個子循環節，則原排列由 $\frac{K}{s}$ 個物品複製 $t \times s$ 次構成，$t \times s > t$， 這會產生矛盾(因爲已知 t 爲最大值)，原假設錯誤，故得證循環節內不會再有子循環節。

第三章　直線排列可能之循環節個數

上一章已介紹 K-循環節之定義，而 K 之值=$\frac{\text{參與直線排列之物品總個數}}{\text{循環節個數}}$，在參與直線排列之物品總個數已給定為 n 之條件下，K 之值由循環節之個數而決定，若循環節個數為 $w_1, w_2, \cdots, w_n$，則 K-循環節之 K 值依序為 $\frac{n}{w_1}, \frac{n}{w_2}, \cdots, \frac{n}{w_n}$，本章介紹直線排列循環節個數之求法，求出循環節個數之目的是為了得到 K-循環節之所有 K 值。

定理 3.1：k 類物品，每類依序有 $x_1, x_2, ..., x_k$ **個，** $(x_1, x_2, ..., x_k)[\text{註}3.1] = d$

則 d **有正因數** $w \Leftrightarrow w$ **為直線排列可能之循環節個數。**

註 3.1：$(x_1, x_2, ..., x_k)$ 表 $x_1, x_2, ..., x_k$ 之最大公因數。

證明：

$(\Rightarrow)$ $(x_1, x_2, ..., x_k) = d$，則 $d \mid x_t, t = 1,2,3,...,k$，已知 $w \mid d$，所以 $w \mid x_t$，令 $x_t = w \times h_t$，則 k 類物品依序有 $w \times h_1, w \times h_2, ..., w \times h_k$ 個，此 k 類物品可視為由 $(h_1 + h_2 + ... + h_k)$ 個物品複製 w 次構成，將各類物品依同類相鄰的原則排成一列依序 $\underbrace{a_1, a_1, ..., a_1}_{(h_1\text{個})}, \underbrace{a_2, a_2, ..., a_2}_{(h_2\text{個})}, ..., \underbrace{a_k, a_k, ..., a_k}_{(h_k\text{個})}$，假設這樣的排法會使循環節具有子循環節，則這個子循環節的開頭必為 a_1，結尾必為 a_k，這會造成下一個子循環節的開頭 a_1 等於 a_k，產生矛盾(因為已知 $a_1 \neq a_k$)，原假設錯誤，所以 $a_1, a_1, ..., a_1, a_2, a_2, ..., a_2, ..., a_k, a_k, ..., a_k$ 不會有子循環節，$\sum_{t=1}^{k} w \times h_t$ 個物品由沒有子循環節的 $(h_1 + h_2 + ... + h_k)$ 個物品複製 w 次構成，共 w 個循環節，所以 w 為直線排列可能之循環節個數，得證。

$(\Leftarrow)$ w 爲直線排列可能之循環節個數，

$x_t = w \times h_t \, (t = 1,2,3,....,k)$

$\Rightarrow d = (x_1, x_2, ..., x_k) = (w \times h_1, w \times h_2, ..., w \times h_k) = w \times (h_1, h_2, ..., h_k)$

$\Rightarrow d$ 有正因數 w ，得證。

例 3.1：111111111111222222222222 排成一列， 1，2 各有 12 個，

(12，12) = 12 ， 而 12 之正因數有 1，2，3，4，6，12

所以 111111111111222222222222 直線排列可能有

1 個循環節： 111111111111222222222222

2 個循環節： 111111222222 111111222222

3 個循環節： 11112222 11112222 11112222

4 個循環節： 111222 111222 111222 111222

6 個循環節： 1122 1122 1122 1122 1122 1122

12 個循環節： 12 12 12 12 12 12 12 12 12 12 12 12

第四章　直線排列循環節的循環排列與環狀排列之對應

第三章得知 K-循環節可寫成$\frac{n}{w}$-循環節(其中n代表參與直線排列之物品總個數，w代表直線排列產生之循環節個數，本章介紹具有$\frac{n}{w}$-循環節之每$\frac{n}{w}$種直線排列會對應到同一種環狀排列之對應關係。

定理 4.1：若排列有e個循環節，每一循環節的循環排列複製e次得一新排列，則此二種排列對應到同一種環狀排列。

註 4.1：n 個物品排列若有w個$\frac{n}{w}$-循環節，每個$\frac{n}{w}$-循環節有$\frac{n}{w}$種相異循環排列，此$\frac{n}{w}$種循環排列複製w次對應到同一種環狀排列。

證明：

環狀排列有e個 K-循環節，指定其中任一物爲起點，順時針方向前進，會經過環上所有物品，出現順序形成一循環排列，所有情形如下

$$
\begin{array}{llll}
a_1a_2a_3.....a_K & a_1a_2a_3...a_K & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_1a_2a_3.....a_K \\
a_2a_3a_4.....a_1 & a_2a_3a_4.....a_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_2a_3a_4.....a_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_Ka_1a_2...a_{K-1} & a_Ka_1a_2...a_{K-1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_Ka_1a_2...a_{K-1}
\end{array}
$$

假設其中有任二者相等，不失一般性，令重複出現的是$a_1....a_K$，且$a_1a_2...a_K$在之後的第 r 個第一次重複出現$\Rightarrow a_1....a_K = a_{r+1}...a_r$，又已知$a_1....a_K$ 在之後的第 K 個會重複出現，因爲 K-循環節沒有子循環節，所以將 K 除以 r 必不能整除，有餘數 s$\Rightarrow$ $0 < s < r \Rightarrow a_1...a_K$在之後的第 s 個重複出現，這會產生矛盾(因爲這會導致$a_1...a_K$在之後第 r 個並非第一次重複出現)$\Rightarrow$原假設錯誤$\Rightarrow$無任二者相等才是正確。由以上得知， n 物排列若有w個$\frac{n}{w}$-循環節，每個$\frac{n}{w}$-循環節有$\frac{n}{w}$種相異循環排列，此$\frac{n}{w}$種循環排列複製w次對應到同一種環狀排列。

例 4.1：12331233 1233 由 4-循環節複製 3 次構成，每一循環節內有 4 個物品，

則 1233　1233　1233

2331　2331　2331

3312　3312　3312

3123　3123　3123

上述 4 種直線排列對應到同一種環狀排列且每一種直線排列由一 4-循環節的循環排列複製 3 次構成。

例 4.2：112233 由 6-循環節複製 1 次構成，每一循環節內有 6 個物品，

則 112233

122331

223311

233112

331122

311223

上述 6 種直線排列對應到同一種環狀排列且每一種直線排列由一 6-循環節的循環排列複製 1 次構成。

第五章　直線排列循環節的子循環節之個數

第三章我們得知 K-循環節之所有 K 值，第四章我們也了解具有 K-循環節之每 K 種直線排列對應到同一種環狀排列，如果我們可以得知具有 K-循環節之所有直線排列情形數 T，將 T 除以 K 即爲環狀排列數。我們計算 T 值時是將 K-循環節內之物品做直線排列再複製 $\frac{n}{\mathrm{K}}$ 次而得到具有 K-循環節之直線排列，但困難的是：K-循環節內之物品做直線排列時有可能結果會產生子循環節，這會瓦解原本的 K-循環節，換句話說，此時的直線排列已不具有 K-循環節，所以要將產生子循環節之情形數扣除掉，才可得到真正的 T 值，本章將子循環節之個數依質數之倍數作分類，這並不能算是分割，因爲子循環節之個數有可能同時是兩個(含)以上質數之倍數(以 abababababab 爲例,有 6 個子循環節 ab，子循環節個數 6 可以是質數 2 之倍數，子循環節個數 6 同時也是質數 3 之倍數)，子循環節個數 6 在子循環節個數是質數 2 之倍數時被算了一次，在子循環節個數是質數 3 之倍數時又被算了一次，所幸這個重複計算的情形可由排容原理排除，這留待下一章再談。

定理 5.1：**循環節內有 k 類物品，每類依序有** $x_1, x_2, ..., x_k$ **個**，$(x_1, x_2, ..., x_k) = d$

d 有質因數 $t \Leftrightarrow$ 循環節內物品作直線排列產生的子循環節個數爲質數 t 之倍數。

證明：

$(\Rightarrow)$ d 有質因數 $t \Rightarrow d$ 有正因數 $t \times u$ (其中 u 爲正整數)由定理 3.1 知 $t \times u$ 爲循環節內物品作直線排列可能產生的子循環節個數 $\Rightarrow$ 此子循環節個數爲質數 t 之倍數。

$(\Leftarrow)$ 循環節內物品作直線排列產生的子循環節個數爲質數 t 之倍數，

不失一般性假設此(t 之倍數)等於 $t \times u$ (其中 u 爲正整數)，

由定理 3.1 知 $(t \times u) \mid d \Rightarrow t \mid d \Rightarrow d$ 有質因數 t ，得證。

例 5.1：循環節 111111222222

1 有 6 個，2 也有 6 個 $\Rightarrow (6,6)=6 \Rightarrow 6$ 有質因數 2，3

將循環節內物品做直線排列可能產生子循環節個數爲

2 的倍數：111222　111222 爲 2 個子循環節

12　12　12　12　12　12 爲 6 個子循環節，

3 的倍數：1122　1122　1122 爲 3 個子循環節

12　12　12　12　12　12 爲 6 個子循環節。

定理 5.2： **k 類物品** $a_1,a_2,...,a_k$ **依序有** $x_1,x_2,...,x_k$ **個,** $(x_1,x_2,...,x_k)=d$ ，d **有正因數** t ，令 A_t 表示此 k **類物品作直線排列後產生循環節個數爲某整數** t **之倍數所有情形所成集合，則** $|A_t|=\dfrac{(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{t})!}{\prod_{i=1}^{k}(\frac{x_i}{t})!}$ **，其中** $t\,|\,x_i\,(i=1,2,3,...,k)$

證明：

k 類物品 $a_1,a_2,...,a_k$ 依序有 $\frac{x_1}{t},\frac{x_2}{t},...,\frac{x_k}{t}$ 個，令此 k 類物品排列之後複製 t 次之所有情形所成集合爲 B_t ，$\forall x\in A_t \Rightarrow x$ 之循環節個數爲 t 之倍數 $\Rightarrow$ 令此循環節個數爲 $t\times p \Rightarrow x$ 由 $\frac{x_1}{t\times p}$ 個 a_1, $\frac{x_2}{t\times p}$ 個 a_2,..., $\frac{x_k}{t\times p}$ 個 a_k 複製 $t\times p$ 次構成 $\Rightarrow x$ 亦可視爲由 $\frac{x_1}{t}$ 個 a_1, $\frac{x_2}{t}$ 個 a_2,..., $\frac{x_k}{t}$ 個 a_k 複製 t 次構成 $\Rightarrow x\in B_t \Rightarrow A_t\subseteq B_t$ …………(1)

$\forall x\in B_t \Rightarrow x$ 由 $\frac{x_1}{t}$ 個 a_1, $\frac{x_2}{t}$ 個 a_2,..., $\frac{x_k}{t}$ 個 a_k 複製 t 次構成

$\Rightarrow$ 令 $(\frac{x_1}{t},\frac{x_2}{t},...,\frac{x_k}{t})=d \Rightarrow$ 由定理 3.1 知 $\frac{x_1}{t}$ 個 a_1, $\frac{x_2}{t}$ 個 a_2,..., $\frac{x_k}{t}$ 個 a_k 作直線排列可能產生的子循環節個數 $e\,|\,d \Rightarrow x$ 可視爲由 $\frac{x_1}{e\times t}$ 個 a_1, $\frac{x_2}{e\times t}$ 個 a_2,..., $\frac{x_k}{e\times t}$ 個 a_k 這個子循環節複製 $e\times t$ 次構成 $\Rightarrow x$ 之循環節個數 $e\times t$ 爲 t 之倍數

$\Rightarrow x\in A_t \Rightarrow B_t\subseteq A_t$ ………(2)

由(1)(2)知 $A_t = B_t \Rightarrow |A_t| = |B_t| = \dfrac{(\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{t})!}{\prod_{i=1}^{k} (\frac{x_i}{t})!}$ ，得證。

例 5.2：循環節 aaaaaabbbbbbcccccc

a，b，c 各有 6 個⇒(6，6，6) = 6 有質因數 2，3⇒ 循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數

爲 2 的倍數之所有情形數爲 $\dfrac{(\frac{6}{2}+\frac{6}{2}+\frac{6}{2})!}{(\frac{6}{2})!(\frac{6}{2})!(\frac{6}{2})!}$

爲 3 的倍數之所有情形數爲 $\dfrac{(\frac{6}{3}+\frac{6}{3}+\frac{6}{3})!}{(\frac{6}{3})!(\frac{6}{3})!(\frac{6}{3})!}$

例 5.3：循環節 aaaaaaaabbbbbbbbcccccccc

a，b，c 各有 8 個⇒(8，8，8) = 8 有質因數 2⇒ 循環節內物品作直線排列後產生子循環節之所有情形數爲 $\dfrac{(\frac{8}{2}+\frac{8}{2}+\frac{8}{2})!}{(\frac{8}{2})!(\frac{8}{2})!(\frac{8}{2})!}$ 。

第六章　具有 K-循環節之直線排列計數

在第五章我們已能知道 K-循環節內物品作直線排列產生之子循環節個數的所有類別以及其情形數的計數方法，由例 5.2 得知 18-循環節 aaaaaabbbbbbcccccc 這 18 個字母排列可能產生子循環節個數可能爲質數 2 或質數 3 之倍數，在扣除子循環個數之過程中，爲了避免重複扣除的情形發生，我們以排容原理來計數，所以我們必須先扣除子循環節個數爲質數 2 之倍數之情形數，再扣除子循環節個數爲質數 3 之倍數之情形數，再加上子循環節個數爲質數 2 之倍數且爲質數 3 之倍數之情形數，問題來了，子循環節個數爲質數 2 之倍數且爲質數 3 之倍數是否等同於子循環節個數爲這兩個質數相乘，也就是 6 之倍數，這個猜想在引理 6.1 中獲得證明，藉由引理 6.1 成功地解決在使用排容原理時所必須遭遇到子循環節之個數有可能同時是兩個(含)以上質數之倍數的問題，這也使得我們在定理 6.1 使用排容原理扣除子循環節之情形數時可以通行無阻，一路順暢。

引理 6.1：循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數爲某整數 **k** 之倍數所有情形所成集合爲 A_k ，若 $(i, j)=1$ 則 $A_i \cap A_j = A_{i\times j}$ 。

證明：

$\forall x \in A_i \cap A_j \Rightarrow x$ 內循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數 t 爲 i 之倍數且爲 j 之倍數 $\Rightarrow [i, j]^* \mid t \Rightarrow \dfrac{i\times j}{(i, j)} \mid t \Rightarrow \dfrac{i\times j}{1} \mid t \Rightarrow i\times j \mid t \quad \Rightarrow x$ 內循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數 t 爲 $i\times j$ 之倍數

$\Rightarrow x \in A_{i\times j} \Rightarrow (A_i \cap A_j) \subseteq A_{i\times j}$ ………………(1)

$\forall x \in A_{i\times j} \Rightarrow x$ 內循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數 t 爲 $i\times j$ 之倍數

$\Rightarrow i\times j \mid t \Rightarrow i \mid t$ 且 $j \mid t \Rightarrow x$ 內循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數 t

***：** $[i, j]$ 表示 i, j 之最小公倍數

i之倍數且為 j 之倍數$\Rightarrow x\in A_i$ 且

$x\in A_j \Rightarrow x\in A_i\cap A_j \Rightarrow A_{i\times j}\subseteq (A_i\cap A_j)$ …………(2)

由(1)(2)知 $A_i\cap A_j = A_{i\times j}$ ，得證。

定理 6.1：**循環節內有 k 類物品，每類依序有** $x_1,x_2,....,x_k$ **個**，$(x_1,x_2,...,x_k)=d$ ，

若 d **之所有相異質因數由小而大為** $d_1,d_2,...,d_n$ **，則循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之所有情形數為** $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}$ 。

(在此定義 $\prod_{y\in\Phi}y=1$ **)**

證明：

循環節內 k 類物品之個數依序為 $x_1,x_2,...,x_k$ 且 $(x_1,x_2,...,x_k)=d$ ，若 d 有相異質因數由小而大為 $d_1,d_2,...,d_n$，由定理 5.2 知將循環節內 $(x_1+x_2+...+x_k)$ 個物品作直線排列產生之子循環節個數必為某 d_i 之倍數，i=1，…，n ，令循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數為某 d_i 之倍數所有情形所成集合為 A_i ，令循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之所有情形所成集合為 T

$$\Rightarrow |\mathrm{T}| = \frac{(x_1+...+x_k)!}{(x_1)!.......(x_k)!}-|\bigcup_{i=1}^{n}A_i| = \frac{(x_1+...+x_k)!}{(x_1)!.......(x_k)!}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\left|\bigcap_{y\in Y}A_y\right|$$

(由引理 **6.1**)$=\dfrac{(x_1+...+x_k)!}{(x_1)!.......(x_k)!}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\left|A_{\prod_{y\in Y}y}\right|$

(由定理 **5.2**)$=\dfrac{(\sum_{i=1}^{k}x_i)!}{\prod_{i=1}^{k}x_i!}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}$，得證。

例 6.1：18-循環節 aaaaaabbbbbbcccccc

a，b，c 各有 6 個$\Rightarrow$(6，6，6) = 6 有質因數 2，3$\Rightarrow$循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之所有情形數為

$$\frac{(6+6+6)!}{6!\times6!\times6!}-\frac{(\frac{6}{2}+\frac{6}{2}+\frac{6}{2})!}{(\frac{6}{2})!(\frac{6}{2})!(\frac{6}{2})!}-\frac{(\frac{6}{3}+\frac{6}{3}+\frac{6}{3})!}{(\frac{6}{3})!(\frac{6}{3})!(\frac{6}{3})!}+\frac{(\frac{6}{2\times3}+\frac{6}{2\times3}+\frac{6}{2\times3})!}{(\frac{6}{2\times3})!(\frac{6}{2\times3})!(\frac{6}{2\times3})!}$$ 。

例 6.2：24-循環節 aaaaaaaabbbbbbbbcccccccc

a，b，c 各有 8 個$\Rightarrow$(8，8，8) = 8 有質因數 2$\Rightarrow$ 循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之所有情形數為 $\frac{(8+8+8)!}{8!\times8!\times8!}-\frac{(\frac{8}{2}+\frac{8}{2}+\frac{8}{2})!}{(\frac{8}{2})!(\frac{8}{2})!(\frac{8}{2})!}$ 。

例 6.3：90-循環節 $\underbrace{aa..........a}_{30個}\ \underbrace{bb..........b}_{30個}\ \underbrace{cc..........c}_{30個}$

a，b，c 各有 30 個$\Rightarrow$(30,30,30) = 30 有質因數 2，3，5$\Rightarrow$循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之所有情形數為

$$\frac{(30+30+30)!}{30!\times30!\times30!}-\frac{(\frac{30}{2}+\frac{30}{2}+\frac{30}{2})!}{(\frac{30}{2})!(\frac{30}{2})!(\frac{30}{2})!}-\frac{(\frac{30}{3}+\frac{30}{3}+\frac{30}{3})!}{(\frac{30}{3})!(\frac{30}{3})!(\frac{30}{3})!}-\frac{(\frac{30}{5}+\frac{30}{5}+\frac{30}{5})!}{(\frac{30}{5})!(\frac{30}{5})!(\frac{30}{5})!}$$

$$+\frac{(\frac{30}{2\times3}+\frac{30}{2\times3}+\frac{30}{2\times3})!}{(\frac{30}{2\times3})!(\frac{30}{2\times3})!(\frac{30}{2\times3})!}+\frac{(\frac{30}{3\times5}+\frac{30}{3\times5}+\frac{30}{3\times5})!}{(\frac{30}{3\times5})!(\frac{30}{3\times5})!(\frac{30}{3\times5})!}+\frac{(\frac{30}{2\times5}+\frac{30}{2\times5}+\frac{30}{2\times5})!}{(\frac{30}{2\times5})!(\frac{30}{2\times5})!(\frac{30}{2\times5})!}$$

$$-\frac{(\frac{30}{2\times3\times5}+\frac{30}{2\times3\times5}+\frac{30}{2\times3\times5})!}{(\frac{30}{2\times3\times5})!(\frac{30}{2\times3\times5})!(\frac{30}{2\times3\times5})!}.$$

第七章　不盡相異物之環狀排列數

在第六章我們已可算出具有 K-循環節之直線排列數 T，而在第三章提過，K 之值=$\frac{\text{參與直線排列之物品總個數}n}{\text{循環節個數}w}$，只要將 T 除以 K，亦即將 T 除以 $\frac{n}{w}$，也就是將 T 乘以 $\frac{w}{n}$，就可得到所對應的環狀排列數，我們依 K-循環節之各個不同 K 值來計算其對應之環狀排列數，再用加法原理將各類之環狀排列數相加即可得完整之環狀排列數。

定理 7.1：n 個物品排成一列後循環節個數由小而大依序爲 $w_1, w_2, \ldots, w_k$，若循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之情形所成集合依序 $S_1, S_2, \ldots, S_k$，則環狀排列數 $=\sum_{i=1}^{k}\frac{w_i \times |S_i|}{n}$。

證明：

k 類物品共 n 個排成一列後有 w_i 個循環節($i=1,2,3,\ldots,k$)，若循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之情形所成集合爲 $S_i \Rightarrow S_i$ 中每種情形都有 w_i 個循環節 $\Rightarrow$ 每一循環節中有 $\frac{n}{w_i}$ 個物品 $\Rightarrow$ 由定理三知 S_i 中每 $\frac{n}{w_i}$ 種循環排列複製 w_i 次對應到同一種環狀排列 $\Rightarrow S_i$ 的環狀排列數 $= |S_i| \div \frac{n}{w_i} = \frac{|S_i| \times w_i}{n} \Rightarrow$ 所有環狀排列數 $= \sum_{i=1}^{k}\frac{w_i \times |S_i|}{n}$。

關於本篇論文之論證至此已算結束，接下來以五個題目（例 7.1～7.5）舉例來使用我們導出的環狀排列計數公式

例 7.1：求 4 白珠，5 黑珠，6 紅珠之環狀排列數?

解：白珠 4 個，黑珠 5 個，紅珠 6 個

$\Rightarrow$(4，5，6)=1，而 1 的正因數只有 1

$w_1=1$ ，$|S_1|=\dfrac{(4+5+6)!}{4!\times5!\times6!}$=630630 ，n=15

$\Rightarrow$環狀排列數 $=\dfrac{1\times630630}{15}=42042$ 。

例 7.2：求 aaaabbbbcccccc 之環狀排列數?

解：a，b 各有 4 個，c 有 6 個$\Rightarrow$(4，4，6)=2，而 2 的正因數有 1，2

$$w_1=1，|S_1|=\frac{(4+4+6)!}{4!\times4!\times6!}-\frac{(\frac{4}{2}+\frac{4}{2}+\frac{6}{2})!}{(\frac{4}{2})!(\frac{4}{2})!(\frac{6}{2})!}=210000,n=14$$

$$w_2=2,|S_2|=\frac{(2+2+3)!}{2!\times2!\times3!}=210,n=14$$

$$\Rightarrow \text{環狀排列數}=\frac{1\times210000}{14}+\frac{2\times210}{14}=15030\text{。}$$

例 7.3：求 aaaabbbbcccccccc 之環狀排列數?

解：a 有 4 個， b 有 4 個， c 有 8 個

$\Rightarrow$**(** 4，4，8) = 4 ，而 4 的正因數有 1，2，4

$$w_1=1,|S_1|=\frac{(4+4+8)!}{4!\times4!\times8!}-\frac{(\frac{4}{2}+\frac{4}{2}+\frac{8}{2})!}{(\frac{4}{2})!(\frac{4}{2})!(\frac{8}{2})!}=900480,n=16$$

$$w_2=2,|S_2|=\frac{(2+2+4)!}{2!\times2!\times4!}-\frac{(\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{4}{2})!}{(\frac{2}{2})!(\frac{2}{2})!(\frac{4}{2})!}=408,n=16$$

$$w_3=4,|S_3|=\frac{(1+1+2)!}{1!\times1!\times2!}=12,n=16$$

$$\Rightarrow \text{環狀排列數}=\frac{1\times900480}{16}+\frac{2\times408}{16}+\frac{4\times12}{16}=56334\text{。}$$

例 **7.4**：求 **aaaaaaaaaaaabbbbbbbbbbbb** 之環狀排列數?

解： a 有 12 個， b 有 12 個，

$\Rightarrow$ **(** 12，12) = 12 ，而 12 的正因數有 1，2，3，4，6，12

$$w_1=1,|S_1|=\frac{(12+12)!}{12!\times 12!}-\frac{(\frac{12}{2}+\frac{12}{2})!}{(\frac{12}{2})!(\frac{12}{2})!}-\frac{(\frac{12}{3}+\frac{12}{3})!}{(\frac{12}{3})!(\frac{12}{3})!}+\frac{(\frac{12}{2\times 3}+\frac{12}{2\times 3})!}{(\frac{12}{2\times 3})!(\frac{12}{2\times 3})!}=2703168, n=24$$

$$w_2=2,|S_2|=\frac{(6+6)!}{6!\times 6!}-\frac{(\frac{6}{2}+\frac{6}{2})!}{(\frac{6}{2})!(\frac{6}{2})!}-\frac{(\frac{6}{3}+\frac{6}{3})!}{(\frac{6}{3})!(\frac{6}{3})!}+\frac{(\frac{6}{2\times 3}+\frac{6}{2\times 3})!}{(\frac{6}{2\times 3})!(\frac{6}{2\times 3})!}=900, n=24$$

$$w_3=3,|S_3|=\frac{(4+4)!}{4!\times 4!}-\frac{(\frac{4}{2}+\frac{4}{2})!}{(\frac{4}{2})!(\frac{4}{2})!}=64, n=24$$

$$w_4=4,|S_4|=\frac{(3+3)!}{3!\times 3!}-\frac{(\frac{3}{3}+\frac{3}{3})!}{(\frac{3}{3})!(\frac{3}{3})!}=18, n=24$$

$$w_5=6,|S_5|=\frac{(2+2)!}{2!\times 2!}-\frac{(\frac{2}{2}+\frac{2}{2})!}{(\frac{2}{2})!(\frac{2}{2})!}=4, n=24$$

$$w_6=12,|S_6|=\frac{(1+1)!}{1!\times 1!}=2, n=24$$

$\Rightarrow$環狀排列數 $=\frac{1\times 2703168}{24}+\frac{2\times 900}{24}+\frac{3\times 64}{24}+\frac{4\times 18}{24}+\frac{6\times 4}{24}+\frac{12\times 2}{24}=112720$ 。

例 7.5：求 30 個 a ， 60 個 b ， 90 個 c 之環狀排列數?

解：a 有 30 個， b 有 60 個， c 有 90 個

$\Rightarrow$ **(** 30，60，90) = 30 ，而 30 的正因數有 1，2，3，5，6，10，15，30

$$w_1=1,|S_1|=\frac{(30+60+90)!}{30!\times 60!\times 90!}-\frac{(\frac{30}{2}+\frac{60}{2}+\frac{90}{2})!}{(\frac{30}{2})!(\frac{60}{2})!(\frac{90}{2})!}-\frac{(\frac{30}{3}+\frac{60}{3}+\frac{90}{3})!}{(\frac{30}{3})!(\frac{60}{3})!(\frac{90}{3})!}-\frac{(\frac{30}{5}+\frac{60}{5}+\frac{90}{5})!}{(\frac{30}{5})!(\frac{60}{5})!(\frac{90}{5})!}$$

$$+\frac{(\frac{30}{2\times 3}+\frac{60}{2\times 3}+\frac{90}{2\times 3})!}{(\frac{30}{2\times 3})!(\frac{60}{2\times 3})!(\frac{90}{2\times 3})!}+\frac{(\frac{30}{3\times 5}+\frac{60}{3\times 5}+\frac{90}{3\times 5})!}{(\frac{30}{3\times 5})!(\frac{60}{3\times 5})!(\frac{90}{3\times 5})!}+\frac{(\frac{30}{2\times 5}+\frac{60}{2\times 5}+\frac{90}{2\times 5})!}{(\frac{30}{2\times 5})!(\frac{60}{2\times 5})!(\frac{90}{2\times 5})!}$$

$$-\frac{(\frac{30}{2\times 3\times 5}+\frac{60}{2\times 3\times 5}+\frac{90}{2\times 3\times 5})!}{(\frac{30}{2\times 3\times 5})!(\frac{60}{2\times 3\times 5})!(\frac{90}{2\times 3\times 5})!},n=180$$

$$w_2=2,|S_2|=\frac{(15+30+45)!}{15!\times 30!\times 45!}-\frac{(\frac{15}{3}+\frac{30}{3}+\frac{45}{3})!}{(\frac{15}{3})!(\frac{30}{3})!(\frac{45}{3})!}-\frac{(\frac{15}{5}+\frac{30}{5}+\frac{45}{5})!}{(\frac{15}{5})!(\frac{30}{5})!(\frac{45}{5})!}+\frac{(\frac{15}{3\times 5}+\frac{30}{3\times 5}+\frac{45}{3\times 5})!}{(\frac{15}{3\times 5})!(\frac{30}{3\times 5})!(\frac{45}{3\times 5})!},n=180$$

$$w_3=3,|S_3|=\frac{(10+20+30)!}{10!\times 20!\times 30!}-\frac{(\frac{10}{2}+\frac{20}{2}+\frac{30}{2})!}{(\frac{10}{2})!(\frac{20}{2})!(\frac{30}{2})!}-\frac{(\frac{10}{5}+\frac{20}{5}+\frac{30}{5})!}{(\frac{10}{5})!(\frac{20}{5})!(\frac{30}{5})!}+\frac{(\frac{10}{2\times 5}+\frac{20}{2\times 5}+\frac{30}{2\times 5})!}{(\frac{10}{2\times 5})!(\frac{20}{2\times 5})!(\frac{30}{2\times 5})!},n=180$$

$$w_4=5,|S_4|=\frac{(6+12+18)!}{6!\times 12!\times 18!}-\frac{(\frac{6}{2}+\frac{12}{2}+\frac{18}{2})!}{(\frac{6}{2})!(\frac{12}{2})!(\frac{18}{2})!}-\frac{(\frac{6}{3}+\frac{12}{3}+\frac{18}{3})!}{(\frac{6}{3})!(\frac{12}{3})!(\frac{18}{3})!}+\frac{(\frac{6}{2\times 3}+\frac{12}{2\times 3}+\frac{18}{2\times 3})!}{(\frac{6}{2\times 3})!(\frac{12}{2\times 3})!(\frac{18}{2\times 3})!},n=180$$

$$w_5=6,|S_5|=\frac{(5+10+15)!}{5!\times 10!\times 15!}-\frac{(\frac{5}{5}+\frac{10}{5}+\frac{15}{5})!}{(\frac{5}{5})!(\frac{10}{5})!(\frac{15}{5})!},n=180$$

$$w_6=10,|S_6|=\frac{(3+6+9)!}{3!\times 6!\times 9!}-\frac{(\frac{3}{3}+\frac{6}{3}+\frac{9}{3})!}{(\frac{3}{3})!(\frac{6}{3})!(\frac{9}{3})!},n=180$$

$$w_7=15,|S_7|=\frac{(2+4+6)!}{2!\times 4!\times 6!}-\frac{(\frac{2}{2}+\frac{4}{2}+\frac{6}{2})!}{(\frac{2}{2})!(\frac{4}{2})!(\frac{6}{2})!},n=180$$

$$w_8=30,|S_8|=\frac{(1+2+3)!}{1!\times 2!\times 3!},n=180$$

$\Rightarrow$ 環狀排列數 $=\sum_{i=1}^{8}\frac{w_i\times|S_i|}{180}$ 。

第八章 結論

綜合所學及搜集到的文獻顯示，算不盡相異物的環狀排列數已知的有兩種方式，第一種：用 Polya 定理，第二種：用陳壽愷先生的五個計算公式，不過這兩種方法都有其弱點所在，如果要讓高中生用這兩種方法來處理不盡相異物的環狀排列問題，並無法達到普及化。首先談到 Polya 定理的弱點：學 Polya 的理論需具備大學代數的基礎，高中生並不具備，而我的理論架構只需用到高中基礎數學的知識。再來談到陳壽愷先生在民國 71 年發表的”論環狀排列與珠狀排列”一書中的五個環狀排列計算公式，有三個弱點：(1)陳先生理論的分類架構建立在節排列，但不同節排列倍數的排列所成集合會有非空之交集，嚴格講起來並非良好之分割;而我的理論分類架構建立在循環節，不同的循環節個數之排列所成集合彼此之間交集爲空集合，故爲一良好之分割。(2)理論架構論證方式不完整，在其書中第 22 頁之定理 2-3 並未加以證明;而我的這篇論文的理論架構論證完整，每一定義都作詳實敘述，每一定理逐一作嚴謹證明，無一疏漏。(3)陳先生發表的公式有五個，不同的情況有不同的公式，且公式冗長繁複，使用不易;而我的公式只有一個，已然含蓋所有情形，不僅簡短有力，而且易於使用。

數學問題的本質很像在找路，它只給您終點前那一段路，然後要您去找到底被擦掉了那些路，有很多世紀數學難題到現在還找不到路!不過，我終於找到了通往環狀排列計數的路：$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k}\dfrac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\dfrac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}$。

今後的展望：珠串排列數 $=\dfrac{\text{環狀排列數}+\text{對稱環個數}}{2}$，現在環狀排列數已得解，若再解出對稱環個數，則珠串排列數可完全解決，對稱環的研究是以後可以努力的方向。

參 考 文 獻

[1]陳壽愷，民國 63 年(1974)，論環狀排列與珠狀排列，科教圖書

[2]陳明哲，民國 48 年(1959)，排列組合，中央書局

[3]王昌銳，民國 61 年(1972) ，組合論，百成書局

[4]王奉民、陳定凱，民國 77 年(1988)，離散數學導論，儒林書局

[5]李雲、林文達，民國 86 年(1997) ，離散數學 ，儒林書局

[6]張子浩，民國 77 年(1988) ，整合離散數學，文笙書局

[7]許振忠，民國 86 年(1997) ，一些排列組合的演算法，政大應數所碩士論文