考試科目	線性代數	所別	應數所 911	考試時間	4 月 19 日 星期六 下午第二節

三. 設 $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_1 - a_3 = a_4\} \subseteq \mathbb{R}$

10% $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_2 = a_3 = a_4,\ a_1 + a_5 = 0\} \subseteq \mathbb{R}$

令 W 是包含 W_1, W_2 的最小子空間

求 $\dim W$. 若有利用到定理, 將它敘述出來.

四. 設 $\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{b}$ 是線性方程式系統.

10% 証明: $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$

五. 設 A 是 $n\times n$ 的實數元矩陣, 其特徵

10% 函數為 $f(x)$.

証明: A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow f(0) \neq 0$.

10% 六. 設 A 是 $m\times n$, B 是 $n\times p$ 的矩陣.

証明: $\operatorname{rank}(AB) \leq \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B))$

備考	試題隨卷繳交

考試科目	微積分	所別	應用數學系 911 916	考試時間	4月19日 星期六 上下午第1節

1. (12%) Determine the convergence or divergence for the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k/5}}$$

2. (12%) Let $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$,

   a. show that f is differentiable at 0.

   b. find $f^{(k)}(0)$, $k \geq 1$.

3. (12%) Show that the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ has area πab where $a, b > 0$.

4. (12%) Let $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ and C be the circular path $x^2 + y^2 = 16$, traversed counterclockwise. Evaluate the line integral

$$\oint_C \left(\nabla f \bullet \vec{N} \right) ds$$

where $\vec{N}$ is the unit normal vector to the curve C.

5. (12%) Let $f(x)$ be a continuous function on $[-1, \infty)$.

   a. What is the average value $A(x)$ of f on $[-1, x]$ for any real number $x > -1$?

   b. If $A(x) = \sin x$, find $f(x)$.

6. (12%) Maximize the function $f(x,y,z) = xyz$ subject to the condition

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

7. (13%)

   a. Show that the series $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k+1}$ converges in the interval $-1 < x \leq 1$.

   b. Show that

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k+1}, \quad -1 < x \leq 1$$

8. (15%) Let S be the set of irrational numbers

$$S = \left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\ldots \right\}$$

That is, $a_1 = \sqrt{2}$ and for each positive integer n,

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

   a. Show that $a_n < 2$ for all n by induction.

   b. Is 2 the least upper bound for S ? Explain your answer.

   c. Find $\lim_{n \to \infty} a_n$, provided the limit exists.

備考	試題隨卷繳交

考試科目	線性代數	所別	應數所 911	考試時間	4 月 19 日 星期六 下午第二節

注意：演算過程之重要步驟必須列出

一. 設 $T: P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, $T(f(x)) = f(x) + f'(x) + x^2 f''(x)$

其中 $P_3(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$

10% (1) 求 T 的零維 nullity(T) 與秩 rank(T).

10% (2) 求 T 的特徵多項式 (characteristic polynomial), det(T) 與 trace(T).

10% (3) T 是否可對角線化? 敘明理由.

5% (4) 求 T 的最小多項式 (minimal polynomial) 並敘述所引用的定理.

二. 設 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的內積定義如下:

$\langle u, v \rangle = u A v'$ 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15% (1) 對 $S = \{ v_1 = (1,1,0), v_2 = (2,0,1), v_3 = (2,2,1) \}$ 執行 Gram-Schmidt 正交化過程, 求出 $\mathbb{R}^3$ 的單範正交基底 (orthonormal basis) $\beta = \{ x_1, x_2, x_3 \}$.

10% (2) 令 $W = \text{span}\{ x_1, x_2 \}$, 求 $z = (1,1,1)$ 在 W 上的正投影 (orthogonal projection).

備考	試題隨卷繳交