第二章 文獻回顧

眾多投資組合的文獻中，首推 Markowitz 在 1952 年提出投資組合選擇問題（portfolio selection problem）的數學規劃模型。此模型要求在給定的平均報酬水準下，使投資組合的風險最小。所以，目標函數所用的風險定義為報酬的變異數，致使建構的模型為一個二次規劃的模型（quadratic programming model）。當一個二次函數的解集合為凸集合時，才有全域最佳解（global optimal solution）的存在，因此，後來的學者發展出僅使用線性函數的數學規劃模型，來避免面對二次規劃模型求解的困難。

Sharpe（1967）對投資組合選擇問題，提出參數線性規劃（parametric linear programming），利用線性的方式來近似 Markowitz 提出的二次風險函數，實證資料顯示此方法的誤差是可接受的。Sharpe（1971）對投資組合提出可行的（feasible）與有效率的（efficient）兩個觀點：一個投資組合若滿足一系列相關的線性限制條件稱為可行的；可行的投資組合中，在相同的期望報酬之下，希望有最小的報酬風險，或是在相同的報酬風險之下，希望有最大的期望報酬，稱為有效率的投資組合。另外，Sharpe 在文中提到利用分段的線性逼近法（piecewise linear approximation）求風險函數，並說明此方法可使用在標準的單一指數模型（single-index model）中。

1980 年，Lee 和 Chesser 提出使用目標規劃（goal programming）解決投資組合的選擇問題。投資者面臨投資組合時有兩個對立目標：希望有最大的期望報酬和有最小的報酬風險。線性規劃方式只能用在當投資組合的期望報酬符合某一標準時，希望有最小的報酬風險，或是用在當投資組合的報酬風險為某一標準時，希望有最大的期望報酬，並不能同時兼顧二者，因此，使用目標規劃便簡單地將多重的目標函數整合成單一的目標函數。

Meade 和 Salkin（1989）提出指數基金（index fund）的建構方法。此投資組合是用來模擬股票指數，模型的目標函數是使追蹤的誤差為最小。論文中提出兩種方法：一種是估計係數法（estimated coefficients），此法根據統計方法決定

在投資組合中，投資特定股票的持有比例；另一種是市值加權法（capitalization-weighted），此法是根據特定公司市值在基金中所有公司總市值的比率，作為投資此公司的比例。在這兩種方法中再加入是否為分層抽樣（stratification）的方式，組成四種情形去做實證研究，研究發現利用估計係數法較市值加權法為佳。然而，是否有分層抽樣，在追蹤指數的成效上並沒有多大的改變。

1991 年 Konno 和 Yamazaki 提出一個建立投資組合的線性規劃模型，用平均偏差的絕對值（mean-absolute deviation）來取代 Markowitz（1952）提出的二次風險函數。其模型不需要假設報酬率符合任何的機率分配。該論文證明若報酬率符合多重變異常態分配（multivariate normally distributed）時會與 Markowitz 模型所得的結果相近，二者的風險函數值有倍數關係。

Feinstein 和 Thapa (1993)將 Konno 和 Yamazaki (1991)的模型改寫成較為簡潔的形式。這兩個等價的模型限制條件的個數不同，當沒有限制投資資產的數目時，後者最多有 $2T + 2$ 個非零的資產出現在最佳投資組合中，而前者最多有 $T + 2$ 個非零資產出現在最佳投資組合中，其中 T 是指投資的時間期數。因此，可藉由控制 T 的大小，來控制構成最佳投資組合的個數。

Speranza（1993）提出利用報酬的半偏差絕對值（mean semi-absolute deviation）所構成的線性組合做為風險函數的線性規劃模型，也就是考量比平均偏差低（mean deviation below）和比平均偏差高（mean deviation above）的線性組合做為風險函數。此模型同樣不須對投資報酬率的分配做任何的前提假設，而且，可以調整不同線性組合的係數以配合風險規避、風險中立、及風險喜好的投資者。對風險規避者而言，此模型與 Konno-Yamazaki（1991）模型相似。Speranza 也考慮模型報酬率是一個非固定的隨機過程(non-stationary stochastic process)，意指這一期的報酬率只與前一期的報酬率有較大的關連，然而，更早之前的時間所得到的報酬率，對這一期的報酬率並不會產生太大的影響，為了考慮此狀態，在半偏差絕對值的線性組合中，加入權重（weighted ）以反映時間遠近的影響。最後更進一步說明與 Markowitz（1952）模型和 Konno-Yamazaki 模型所得到的結果相似。

前述的模型均未考慮實際市場交易的狀況，Speranza（1996）將交易成本、最小交易單位、和最少部位限制（minimum transaction lots）等，納為投資組合模型的限制條件中。當考慮到最小交易單位時，將本來限制非零的資產，加入需要為整數的限制；當考慮最少部位限制時，需要引用一系列的二元變數來配合，所以，建構出一個混合整數的線性規劃模型，在計算上就困難許多，因此，Speranza 提出一套啟發式演算法，並實際應用在米蘭股票交易市場中。在論文中也說明當投資金額增加時，利用其演算法求得的解之誤差會愈小。

Young 在 1998 年提出大中取小的投資組合選擇法。此法依據歷史資料，計算觀測期間某投資組合的最大損失，選取使得個別最大損失為最小值的投資組合，即是大中取小的原則。在論文中也說明在假設利潤分配是常態分配時，利用大中取小法所建構的模型與 Markowitz（1952）模型是一致的。

Mansini 和 Speranza 在 1999 年提出在投資組合的問題中加入最小交易單位的限制，並且證明此問題為一個完備的不確定多項式(NP-complete)問題。因為加入最小交易單位的條件，會使得原本只限制非零的資產，改為整數的限制，因而建構出混合整數的線性規劃模型。針對此模型提出新的演算法，從求得鬆弛問題(the relaxed problem)的解開始，進一步求得可行解，文末並提出應用在米蘭股票市場的實證資料。

Ghezzi（1999）在債券投資組合的管理上，提出簡易的免疫作用問題（simple immunization problem），此問題可公式化為一個利用大中取小的性質做到最佳控制的問題。因為債券市場比股票市場更反覆無常，所以投資者不希望在買了債券之後的任何投資期間中，投資報酬率有不在預期中的變化，因此，希望當收益率曲線在最差的情形下，能夠有最多的報酬，此為本文應用的大中取小性質。Ghezzi 利用動態規劃的方法來求最佳解，並說明此最佳解有下界（lower bound）。

在 2000 年，Xia 等人提出一個新的投資組合選擇方法，將證券的期望報酬

視為變數而不是用算術平均數來表示。並且提出 3 個會影響證券選入投資組合順序的因素，包括：算術平均數（arithmetic mean）、歷年來的獲利趨勢（historical return tendency）、及證券未來獲利的預測（forecast of the future returns of a security），採用加權平均法（weight averaging method），將這 3 個因素各給一個權重，讓這 3 個權重的加總等於 1，並針對不同的狀況，說明會產生不同的獲利情形。再加上此模型為非單峰的最大化問題，使得可行解集合為一個特別的結構，所以發展基因演算法（genetic algorithm）來求解。另外，也加入交易成本這個重要的因素於模型中。從實證數據知道，這兩個模型所求得的解會比 Markowitz（1952）模型來得好些。

Cai（2000）等人提出希望個別資產的最大風險要最小之投資組合選擇規則，定義了新的風險函數為 l_∞ 函數：在 n 個資產中，報酬率的絕對偏差期望值（expected absolute deviation）為最大者。在這個規則中，求解有兩個步驟，第一步是將個別資產的期望報酬與風險由小到大排序，第二步是根據排序後的資訊計算最佳的情形。針對有風險的資產與無風險的資產這兩種狀況分別加以說明，並利用所求出的分析解，可以畫出所有的效率前緣（efficient frontier）。此論文也與 Markowitz（1952）的報酬變異數模型中所提到之風險函數（l_2）做比較，從分析中知道，當被投資的資產間具有高度相關時，l_∞ 模型較穩定。

Konno 和 Wijayanayake（2001）在投資組合問題中，用平均偏差的絕對值當作風險測度，並加入非凸的交易成本及最小交易單位等限制條件，利用枝界法（branch and bound algorithm）來求得最佳解。因為交易成本的函數是一非遞減凹函數，所以利用分段線性的方式在凹函數下方逼近此函數的估計策略，此處的分段方式用 w -細分法（w -subdivision）來代替二分法。在論文中也提到隨著資產個數的增加會增加計算的時間，為了簡化此問題，提出一個很重要的定理就是存在一組最佳解為最多有 $T+1$ 個資產滿足模型中的限制條件，亦即在此投資組合模型中最多有 $T+1$ 個非零資產，此處的 T 為歷史資料的時間期數，因此，我們可藉由控制 T 來控制投資組合中的資產個數。

本論文將運用 Young（1998）提出的大中取小原則，建構一個投資組合選

擇的數學規劃模型。此數學規劃模型將考慮股票市場實際交易時遇到之限制條件，例如：最小交易單位、交易成本、固定交易費用比率、股票總類數限制、及單一股票的部位限制等。當考慮最小交易單位和投資股票總數的限制條件，會讓模型的決策變數從非零的限制，變成整數的限制，所建構的模型為混合整數的線性規劃模型。因為決策變數為整數這個因素，使得求解上比較不容易，所以將發展一套啟發式演算法，求得較佳的可行解。並且以台灣股票市場中的資料，作為實證研究的對象。