附錄 A：M.W.G.估計的期望值及其共變異矩陣之推導

根據 Mansfield et al.(1977)文中附錄的結果

$$\Lambda_s\hat{\gamma}_s - \Lambda_s A\hat{\gamma}_s = V_2^{'}[V_2\Lambda_s^{-1}V_2^{'}]^{-1}V_2\hat{\gamma}_s$$

我們可導出下列關係式

$$\Lambda_s A\hat{\gamma}_s = \Lambda_s\hat{\gamma}_s - V_2^{'}[V_2\Lambda_s^{-1}V_2^{'}]^{-1}V_2\hat{\gamma}_s$$

$$\Rightarrow A\hat{\gamma}_s = [I - \Lambda_s^{-1}V_2^{'}(V_2\Lambda_s^{-1}V_2^{'})^{-1}V_2]\hat{\gamma}_s$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}_s = A\hat{\gamma}_s = [I - \Lambda_s^{-1}V_2^{'}(V_2\Lambda_s^{-1}V_2^{'})^{-1}V_2]\hat{\gamma}_s$$

因此，$\tilde{\gamma}_s$的期望值為

$$E(\tilde{\gamma}_s) = [I - \Lambda_s^{-1}V_2^{'}(V_2\Lambda_s^{-1}V_2^{'})^{-1}V_2]E(\hat{\gamma}_s)$$

$$= [I - \Lambda_s^{-1}V_2^{'}(V_2\Lambda_s^{-1}V_2^{'})^{-1}V_2]\gamma_s \quad (\because \hat{\gamma}_s \text{ 是 } \gamma_s \text{ 的 LSE})$$

而$\tilde{\beta}$的期望值為

$$E(\tilde{\beta}) = E(V_s\tilde{\gamma}_s)$$

$$= V_s[I - \Lambda_s^{-1}V_2^{'}(V_2\Lambda_s^{-1}V_2^{'})^{-1}V_2]\gamma_s$$

因$\hat{\gamma}_s = \Lambda_s^{-1}W_s^{'}Y$ ，故$\hat{\gamma}_s$的共變異矩陣(covariance matrix)

$$C(\hat{\gamma}_s) = C(\Lambda_s^{-1}W_s^{'}Y)$$

$$= \Lambda_s^{-1}W_s^{'}W_s\Lambda_s^{-1}\sigma^2$$

又$W = (W_s \quad W_{k-s})$ 且$W^{'}W = \Lambda$，故

$$W'W = \begin{pmatrix} W_s' \\ W_{k-s}' \end{pmatrix} (W_s W_{k-s})$$

$$= \begin{pmatrix} W_s' W_s & W_s' W_{k-s} \\ W_{k-s}' W_s & W_{k-s}' W_{k-s} \end{pmatrix}$$

$$= \Lambda$$

$$= \begin{pmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_{k-s} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W_s' W_s = \Lambda_s$$

$$\therefore \ \mathrm{C}(\hat{\gamma}_s) = \Lambda_s^{-1} W_s' W_s \Lambda_s^{-1} \sigma^2$$

$$= \sigma^2 \Lambda_s^{-1}$$

因此，$\tilde{\gamma}_s$的共變異矩陣

$$\mathrm{C}(\tilde{\gamma}_s) = \sigma^2 [I - \Lambda_s^{-1} V_2' (V_2 \Lambda_s^{-1} V_2')^{-1} V_2] \Lambda_s^{-1} [I - V_2' (V_2 \Lambda_s^{-1} V_2')^{-1} V_2 \Lambda_s^{-1}]$$

$$= \sigma^2 (\Lambda_s^{-1} - \Lambda_s^{-1} V_2' (V_2 \Lambda_s^{-1} V_2')^{-1} V_2 \Lambda_s^{-1}) (I - V_2' (V_2 \Lambda_s^{-1} V_2')^{-1} V_2 \Lambda_s^{-1})$$

$$= \sigma^2 [\Lambda_s^{-1} - \Lambda_s^{-1} V_2' (V_2 \Lambda_s^{-1} V_2')^{-1} V_2 \Lambda_s^{-1} - \Lambda_s^{-1} V_2' (V_2 \Lambda_s^{-1} V_2')^{-1} V_2 \Lambda_s^{-1}$$

$$+ \Lambda_s^{-1} V_2' (V_2 \Lambda_s^{-1} V_2')^{-1} V_2 \Lambda_s^{-1} V_2' (V_2 \Lambda_s^{-1} V_2')^{-1} V_2 \Lambda_s^{-1}]$$

$$= \sigma^2 (\Lambda_s^{-1} - \Lambda_s^{-1} V_2' (V_2 \Lambda_s^{-1} V_2')^{-1} V_2 \Lambda_s^{-1})$$

於是，$\tilde{\beta} = V_s \tilde{\gamma}_s$的共變異矩陣

$$\mathrm{C}(\tilde{\beta}) = \sigma^2 V_s (\Lambda_s^{-1} - \Lambda_s^{-1} V_2' (V_2 \Lambda_s^{-1} V_2')^{-1} V_2 \Lambda_s^{-1}) V_s'$$