附錄 C：(3.3.5)式最佳化問題的解

(3.3.5)式的最佳化問題可改寫為

$$\min\ \mu_r=\sum_{j=1}^{s}(1-a_j)^2\lambda_j\hat{\gamma}_j^2$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{k}a_j(1-a_j)\lambda_j\hat{\gamma}_j^2=0$$

$$\sum_{j=1}^{s}a_jV_{tj}\hat{\gamma}_j=0\ ，\ t=k-r+1,k-r+2,\cdots,k$$

其中$V_2=(V_{tj}):r\times s$ 。

又因$\sum_{j=1}^{k}a_j(1-a_j)\lambda_j\hat{\gamma}_j^2=0$，$\sum_{j=1}^{s}(1-a_j)^2\lambda_j\hat{\gamma}_j^2$ 可轉變為$\sum_{j=1}^{s}(1-a_j)\lambda_j\hat{\gamma}_j^2$ ，重整後的最佳化的問題變成

$$\max\quad u_r=\sum_{j=1}^{s}a_j\lambda_j\hat{\gamma}_j^2$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{k}a_j(1-a_j)\lambda_j\hat{\gamma}_j^2=0$$

$$\sum_{j=1}^{s}a_jV_{tj}\hat{\gamma}_j=0\ ，\ t=k-r+1,k-r+2,\cdots,k$$

上列式子可以矩陣形態表示如下：

$$u_r=\sum_{j=1}^{s}a_j\lambda_j\hat{\gamma}_j^2=\hat{\gamma}_s'\Lambda_s^{\frac{1}{2}}A_s\Lambda_s^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_s$$

$$\sum_{j=1}^{k}a_j(1-a_j)\lambda_j\hat{\gamma}_j^2=\hat{\gamma}_s'\Lambda_s^{\frac{1}{2}}A_s(I-A_s)\Lambda_s^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_s=0$$

$$\sum_{j=1}^{s}a_jV_{tj}\hat{\gamma}_j=V_2A_s\hat{\gamma}_s=V_2\Lambda_s^{-\frac{1}{2}}A_s\Lambda_s^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_s=0,\quad t=k-r+1,k-r+2,\cdots,k$$

令$c=\Lambda_s^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_s$ ，$x=A_s\,c$ ，$W_2=V_2\Lambda_s^{-\frac{1}{2}}$ ，則最佳化問題可進一步改寫為

$$\text{Max} \quad u_r = c'x$$

$$\text{S.t.} \quad c'x - x'x = 0$$

$$W_2 x = 0$$

令 L=$c'x$ $+\rho(c'x-x'x)$+$\mu' W_2 x$，其中ρ及μ均為 Lagrange 乘數。將 L 對x偏微分並令之為 0，解出

$$x = \frac{1}{2\rho}(c+\rho c+W_2'\mu) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

再將 L 對ρ偏微分並令之為 0，得到

$$c'x - x'x = 0$$

將(1)式代入上式

$$\Rightarrow c'[\frac{1}{2\rho}(c+\rho c+W_2'\mu)] - \frac{1}{4\rho^2}[(c+\rho c+W_2'\mu)'(c+\rho c+W_2'\mu)] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\rho^2}(\rho^2 c'c - c'c - \mu' W_2' c - c'W_2'\mu - \mu' W_2 W_2'\mu) = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 c'c - c'c - 2c'W_2'\mu - \mu' W_2 W_2'\mu = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

最後，L 對μ偏微分並令之為 0，得$W_2 x$=0。將(1)式代入後，得

$$W_2[\frac{1}{2\rho}(c+\rho c+W_2'\mu)] = 0，$$

解μ，得

$$\mu = -(W_2 W_2')^{-1}(W_2 c + \rho W_2 c) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

將(3)式代入(2)式

$$\Rightarrow \rho^2 c'c - c'c - 2c'W_2'[-(W_2 W_2')(W_2 c + \rho W_2 c)] -$$

$$[-(W_2 W_2')^{-1}(W_2 c + \rho W_2 c)]' W_2 W_2' [-(W_2 W_2')^{-1}(W_2 c + \rho W_2 c)] = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 c'c - c'c + c'W_2'(W_2 W_2')^{-1} W_2 c - \rho^2 c'W_2'(W_2 W_2')^{-1} W_2 c = 0$$

解出 ρ＝1。代入(3)式，得 μ＝－2 $(W_2W_2^{'})^{-1}(W_2c)$。

將 ρ、μ 代入(1)式，得

$$x \;=c-W_2^{'}(W_2W_2^{'})^{-1}W_2c \;=[I-W_2^{'}(W_2W_2^{'})^{-1}W_2]c$$

$$\Rightarrow A_s\, c = [\,I-W_2^{'}(W_2W_2^{'})^{-1}W_2\,]\,c$$

又已知 $W_2 = V_2\Lambda_s^{-\frac{1}{2}}$，$c = \Lambda_s^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_s$，代入上式後

$$\Rightarrow \; A_s\,\Lambda_s^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_s = \Lambda_s^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_s - \Lambda_s^{-\frac{1}{2}}V_2^{'}(V_2\Lambda_s^{-1}V_2^{'})^{-1}V_2\Lambda_s^{-\frac{1}{2}}\,\Lambda_s^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_s$$

$$\Rightarrow \; A_s\,\Lambda_s^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_s = \Lambda_s^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_s - \Lambda_s^{-\frac{1}{2}}V_2^{'}(V_2\Lambda_s^{-1}V_2^{'})^{-1}V_2\,\hat{\gamma}_s$$

若分別觀察等號兩邊的第 j 個元素，可導出下列關係式：

$$a_j\lambda_j^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_j = \lambda_j^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_j - \lambda_j^{-\frac{1}{2}}v_{2j}^{'}(V_2\Lambda_s^{-1}V_2^{'})V_2\hat{\gamma}_s$$

$$\Rightarrow a_j = 1-v_{2j}^{'}(V_2\Lambda_s^{-1}V_2^{'})V_2\hat{\gamma}_s/\lambda_j\hat{\gamma}_j \;，\; j=1,2,\cdots,s$$