

第四章 實例分析

本章共分為兩個部分，分別介紹所採用的兩個實例，並在不同的狀況下，說明與比較加上限制條件 $a_j \in [0,1]$ 和未加上該條件時，M.W.G. 係數估計以及變數刪除結果上有何差異。

4.1 例一：礦坑內支撐物最大強度之分析

4.1.1 說明與探討

本文所採用的第一個例子是 Jeffers(1967) 中一份 180 筆橫木(timber) 的資料，以主成份迴歸來分析礦坑內支撐物(pitprop)最大強度 (compressive strength) 與另外 13 個變數間的關係。該資料的 13 個變數分別為：支撐物的長度(X1-LENGTH)、支撐物頂端的直徑(X2-TOPDIAM)、支撐物的溼度(X3-MOIST)、支撐物在測試時的比重(X4-TESTSG)、將支撐物烘乾後的比重(X5-OVENSG)、支撐物頂端的年輪數(X6-RINGTOP)、支撐物底部的年輪數(X7-RINGBUT)、支撐物所能彎曲的極限(X8-BOWMAX)、支撐物處於最大彎曲狀態時頂端至底部的距離(X9-BOWDIST)、環生體的個數(X10-WHORLS0)、經過清理後支撐物的長度(X11-CLEAR1)、每個環生體中“節”的平均個數(X12-KNOTS) 及節的平均直徑(X13-DIAKNOT)，所有的資料訊息以相關係數矩陣形式陳列於附錄 D 中。在本章中各表格所獲得的計算結

果，均係利用 MATLAB 及 LINGO 程式語言求得。

本例中矩陣 $X'X$ 的特徵值由大至小依序為:4.219，2.378，1.878，1.109，0.910，0.815，0.576，0.440，0.353，0.191，0.0506，0.0415 及 0.0387， $X'X$ 的條件數(condition number) $\kappa=4.219/0.0387=109.02$ 。一般來說，條件數 $\kappa < 100$ ，表示沒有共線性問題；條件數 $100 < \kappa < 1000$ ，表示有輕度至強度間的多重共線性問題；而 $\kappa > 1000$ ，則表示有嚴重的多重共線性問題。本例中， $\kappa=109.02$ ，顯示有輕微的多重共線性情形。另一方面，根據 2.1 節曾提到，矩陣 $C = (X'X)^{-1}$ 之對角線元素 C_{jj} ，即變異膨脹因子 VIF_j ，係另一個判斷自變數間共線性強弱的指標。當變數間共線性很強時，(2.1.11)式中的 R_j^2 會趨近於 1。也就是說當共線性很強時，至少會有一個以上的 VIF 的值很大。對所有自變數迴歸的係數估計、標準差、t 值、p 值、決定係數 R_j^2 以及採用後退刪除法的係數估計與標準差結果如下:

表 4.1 完全模型及後退刪除法的相關結果

變數	對所有自變數迴歸					後退刪除法	
	迴歸係數	標準差	t 值	p 值	R_j^2	迴歸係數	標準差
X1	-0.4885	1.8802	-0.26	0.3975	0.9239	-0.4921	1.8728
X2	0.4006	1.9212	0.20	0.4308	0.9272	0.3896	1.8814
X3	-0.9753	1.7715	-0.55	0.2912	0.9143	-0.9719	1.7690
X4	0.2925	1.8283	0.16	0.4365	0.9192	0.2854	1.8257
X5	-0.0822	0.8257	-0.10	0.4602	0.6051	-0.0761	0.8214
X6	0.1789	1.3659	0.13	0.4483	0.8558	0.2271	1.1991
X7	0.1351	1.7996	0.075	0.4711	0.9168	-	-
X8	-0.2632	0.7061	-0.37	0.3557	0.4602	-0.2775	0.6746
X9	-0.0728	0.7524	-0.10	0.4602	0.5245	-0.0745	0.7519
X10	-0.0846	1.1736	-0.07	0.4721	0.8046	-	-
X11	0.0967	0.6377	0.15	0.4404	0.3382	0.1190	0.5438
X12	-0.0689	0.6214	-0.11	0.4602	0.3028	-0.0624	0.6128
X13	0.0010	0.6904	0.001	0.5000	0.4353	-	-

而根據表 4.1 中各變數的決定係數 R_j^2 ，計有 5 個變數之 R_j^2 大於 0.9，顯示某些變數間有極強的線性關係；但也有 4 個變數之 R_j^2 小於 0.5，顯示這 4 個變數與其他變數間的線性關係較弱。因此，就 VIF_j 值而言，本例的共線性非常嚴重，這與由條件數來判斷本例共線性強弱的結果有些出入。繼續觀察對變數分別進行 t-檢定後所得到的 p 值，我們發現個別檢定的結果均不顯著。但對整體模型進行 F 檢定時，結果卻是顯著的，此表示有些變數是多餘的。因後退刪除法和 M.W.G. 變數刪除法較為類似，故將其係數估計、標準差的結果一併列在表 4.1 中，以便後續的對照比較用。

註：表 4.1 中後退刪除法已剔除了變數 X7，X10 及 X13，故表中對應格內值沒有，以“-”顯示。

應變數 Y 對全部 13 個主成份迴歸時的殘差平方和(sum of squares of residuals)為 0.26914，而自由度(degree of freedom)為 166 的均方誤 MSE (mean square error)則為 0.0016213。當對應於最小 3 個特徵值的主成份被刪除後，殘差平方和增至 0.31489，而 MSE 則為 0.0018633。

不論採用 M.W.G.原方法或改良法進行變數刪除時，所使用的仿 F -型檢定統計量 F 之值係與 $F_{0.25}(1,166) = 1.33$ 比較，以便決定變數應保留或刪除。根據 3.5 節的說明，有三個重要因素會影響到自變數的刪除與否，因此在分析實例時，共有八種情況需要考慮。而本文的主要目的是探討與比較加上限制條件 $a_j \in [0,1]$ 與否對 M.W.G.自變數刪除的過程與結果究竟會產生怎樣的影響?因此，在區分為四種不同狀況下，我們將“加上限制條件 $a_j \in [0,1]$ ”與“未加上限制條件 $a_j \in [0,1]$ ”時，執行 M.W.G.變數刪除的結果分別表列如後，以便進行分析、比較。M.W.G.的係數估計及標準差可根據式(3.3.1)與(3.3.3)求得。但加上限制條件的 M.W.G.係數估計無法以公式表示，因此標準差就無從獲得，此時僅對變數刪除的過程與結果加以討論。

狀況一：不刪除對應於較小的特徵值之主成分，採用 M.W.G 原方法

(1) 未加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.2 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	0	X13-DIAKNOT	0.0003	刪除 X13
2	0	X10-WHORLS	0.9032	再刪 X10
3	0	X7-RINGBUT	0.2660	再刪 X7
4	0	X9-BOWDIST	1.4005	停止，不刪 X9

表 4.3 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數	標準差
X1-TOPDIAM	-0.4601	1.8665
X2-LENGTH	0.3366	1.8749
X3-MOIST	-0.9776	1.7463
X4-TESTSG	0.2803	1.8254
X5-OVERSG	-0.0741	0.8169
X6-RINGTOP	0.2646	0.6502
X7-RINGBUT	0	0.0195
X8-BOWMAX	-0.2905	0.6295
X9-BOWDIST	-0.0637	0.7260
X10-WHORLS	0	0.0083
X11-CLEAR	0.1117	0.5304
X12-KNOTS	-0.0699	0.5759
X13-DIANOT	0	0.0029

表 4.4 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
0.9697	1.0044	0.9656	0.9686	1.0027	0.9817	0.8898
a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	
1.3275	0.3771	20.7292	2.5387	0.9357	-26.273	

(2) 加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.5 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	0	X13-DIAKNOT	8.3000	不刪除 X13

表 4.6 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數
X1-TOPDIAM	-0.4658
X2-LENGTH	-0.3971
X3-MOIST	-0.9614
X4-TESTSG	0.2866
X5-OVERSG	-0.0836
X6-RINGTOP	0.1478
X7-RINGBUT	0.2256
X8-BOWMAX	-0.1509
X9-BOWDIST	-0.1980
X10-WHORLS	-0.1239
X11-CLEAR	0.0922
X12-KNOTS	-0.0276
X13-DIANOT	0.02569

表 4.7 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	1	1	1	1	1	1
a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	
0	1	1	0	1	1	

註:加了限制條件 $a_j \in [0,1]$ 後係數估計無法以公式表示，故表 4.6 未列出其標準差。

狀況二：刪除對應於較小的 3 個特徵值之主成分，採用 M.W.G.原方法

(1) 未加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.8 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	3	X13-DIAKNOT	0.1225	刪除 X13
2	3	X9-BOWDIST	0.2238	再刪 X9
3	3	X12-KNOTS	1.8857	停止,不刪 X12

表 4.9 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數	標準差
X1-TOPDIAM	-0.0846	0.2846
X2-LENGTH	-0.0369	0.3164
X3-MOIST	-0.4120	0.3216
X4-TESTSG	-0.3178	0.2912
X5-OVERSG	0.1296	0.5639
X6-RINGTOP	0.1909	0.4389
X7-RINGBUT	0.1832	0.2681
X8-BOWMAX	-0.3255	0.6489
X9-BOWDIST	0	0.0024
X10-WHORLS	-0.0572	0.2454
X11-CLEAR	0.0971	0.4716
X12-KNOTS	-0.0573	0.5537
X13-DIANOT	0	0.0012

表 4.10 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
0.9879	1.0061	1.0132	0.8720	1.0081	0.9511	0.9398
a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	
1.1523	1.1725	0.0000	0	0	0	

(2) 加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.11 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	3	X5-OVENS	18.7410	不刪除 X5

表 4.12 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數
X1-TOPDIAM	-0.1098
X2-LENGTH	-0.0580
X3-MOIST	-0.4150
X4-TESTSG	-0.2979
X5-OVERSG	0.2314
X6-RINGTOP	0.1268
X7-RINGBUT	0.1278
X8-BOWMAX	-0.2068
X9-BOWDIST	0.0773
X10-WHORLS	-0.0702
X11-CLEAR	0.1004
X12-KNOTS	0.0518
X13-DIANOT	-0.0327

表 4.13 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	1	1	0	1	1	0
a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	
1	1	0	0	0	0	0

註:加了限制條件 $a_j \in [0,1]$ 後係數估計無法以公式表示，故表 4.12 未列出其標準差。

狀況三：不刪除對應於較小的特徵值之主成分，採用 M.W.G改良法

(1) 未加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.14 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	0	X13-DIAKNOT	0.0004	刪除 X13
2	0	X10-WHORLS	0.9087	再刪 X10
3	0	X7-RINGBUT	0.2692	再刪 X7
4	0	X9-BOWDIST	1.4259	停止，不刪 X9

表 4.15 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數	標準差
X1-TOPDIAM	-0.4862	1.8671
X2-LENGTH	0.3958	1.8750
X3-MOIST	-0.9828	1.7478
X4-TESTSG	0.2866	1.8255
X5-OVERSG	-0.0762	0.8215
X6-RINGTOP	0.2674	0.6515
X8-BOWMAX	-0.2727	0.6641
X9-BOWDIST	-0.0667	0.7262
X11-CLEAR	0.1142	0.5305
X12-KNOTS	-0.0708	0.5759

表 4.16 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1.0043	0.9972	0.9942	0.9902	0.9963
a_6	a_8	a_9	a_{11}	a_{12}
0.9657	0.9813	1.6555	1.0078	0.0000

註：採改良法在最後模型中僅剩 10 個變數，故表 4.16 中矩陣 A 大小只有 10×10。

(2) 加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.17 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	0	X13-DIAKNOT	8.3000	不刪除 X13

表 4.18 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數
X1-TOPDIAM	-0.4658
X2-LENGTH	0.3971
X3-MOIST	-0.9614
X4-TESTSG	0.2866
X5-OVERSG	-0.0836
X6-RINGTOP	0.1418
X7-RINGBUT	0.2256
X8-BOWMAX	-0.1509
X9-BOWDIST	-0.1980
X10-WHORLS	-0.1239
X11-CLEAR	0.0922
X12-KNOTS	-0.0277
X13-DIANOT	0.2569

表 4.19 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	1	1	1	1	1	1
a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	
0	1	1	0	1	1	

註：加了限制條件 $a_j \in [0,1]$ 後係數估計無法以公式表示，故表 4.18 未列出其標準差。

狀況四：刪除對應於較小的 3 個特徵值之主成分，採用 M.W.G.改良法

(1) 未加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.20 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	3	X13-DIAKNOT	0.1225	刪除 X13
2	3	X9-BOWDIST	0.1746	再刪 X9
3	3	X2-LENGTH	1.233	再刪 X2
4	2	X10-WHORLS	0.9556	再刪 X10
5	2	X12-KNOTS	1.1373	再刪 X12
6	2	X11-CLEAR	7.6481	停止，不刪 X11

表 4.21 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數	標準差
X1-TOPDIAM	-0.1702	0.6757
X3-MOIST	-0.4069	0.3209
X4-TESTSG	-0.3144	0.2902
X5-OVERSG	0.1309	0.5598
X6-RINGTOP	0.2044	0.4193
X7-RINGBUT	0.1629	0.2851
X8-BOWMAX	-0.3087	0.5999
X11-CLEAR	0.1119	0.5279

表 4.22 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_{11}
1.0029	1.0177	0.6621	1.0601	0.8321	0.8909	0	0

註：採改良法在最後模型中僅剩 8 個變數，故表 4.22 中矩陣 A 大小只有 8x8。

(2) 加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.23 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	3	X5-OVENS	18.7410	不刪除 X5

表 4.24 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數
X1-TOPDIAM	-0.1098
X2-LENGTH	-0.0580
X3-MOIST	-0.4150
X4-TESTSG	-0.2979
X5-OVERSG	0.2314
X6-RINGTOP	0.1268
X7-RINGBUT	0.1278
X8-BOWMAX	-0.2068
X9-BOWDIST	0.0773
X10-WHORLS	-0.0702
X11-CLEAR	0.1004
X12-KNOTS	0.0518
X13-DIANOT	-0.0327

表 4.25 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	1	1	0	1	1	0
a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	
1	1	0	0	0	0	0

註:加了限制條件 $a_j \in [0,1]$ 後係數估計無法以公式表示，故表 4.24 未列出其標準差。

4.1.2 結果分析

綜觀前一節所獲致各表的結果，可歸納出下列四點結論：

1. 當 $a_j \in [0,1]$ 這個限制條件被加入模式後，四種狀況下所獲得的結果均有一個現象趨於一致，即被刪除的變數個數均少於未加上限制條件 $a_j \in [0,1]$ 時所刪除的變數個數，這和之前理論的預期結果是符合的。
2. 在不考慮 $a_j \in [0,1]$ 這個限制條件時，比較表 4.2 與 4.14、表 4.8 與 4.20，可印證 Mansfield et al.(1977)所言，他們的改良法較原方法有效，即所刪除的變數個數會較多。
3. 在不考慮 $a_j \in [0,1]$ 這個限制條件時，Mansfield et al.(1977)認為，預先刪除對應較小的特徵值之主成份會使變數刪除的個數更多。但比較表 4.2 與 4.8 後，發現他們所言不完全正確。
4. 後退刪除法所選擇的變數和狀況三採用改良法(即表 4.14)所選擇的變數相同，且兩者的係數估計極為接近。

4.2 例二：乙炔(acetylene)轉換比例之分析

4.2.1 說明與探討

本文所採用的第二個例子是 Douglas, Montgomery , Peck (2001)中關於乙炔(acetylene)轉換比例與另九個變數的資料。本資料的九個變數分別為：氣體接觸的時間長短(X1-T)、氫(H_2)與 n-Heptane 的比值(X2-H)、氣體接觸時的溫度(X3-C)、T 與 H 的交互項(X4-T×H)、T 與 C 的交互項(X5-T×C)、C 與 H 的交互項(X6-C×H)、T 本身的交互項(X7- T^2)、H 本身的交互項(X8- H^2)、C 本身的交互項(X9- C^2)、此例之原始資料已被標準化，且並詳列於附錄 D 中。

本例中矩陣 $X'X$ 的特徵值由大至小依序為：4.2048，2.16261，1.13839，1.0413，0.38453，0.04951，0.01363，0.00513，0.0001。矩陣 $X'X$ 的條件數 $\kappa=4.2048/0.0001=42048$ 。依照上一節對共線性嚴重程度的分類，顯示本例有嚴重的多重共線性問題。

應變數 Y 對所有自變數迴歸的係數估計、標準差、t 值、p 值、決定係數 R_j^2 以及採用後退刪除法的係數估計、標準差如下表：

表 4.26 完全模型及後退刪除法的相關結果

變數	對所有自變數迴歸					後退刪除法	
	迴歸係數	標準差	t 值	p 值	R_j^2	迴歸係數	標準差
X1	3.2893	2.9785	1.10	0.3117	0.9973	0.3563	0.0360
X2	-0.5209	0.2037	-2.56	0.0431	0.4041	-0.4884	0.2559
X3	3.9665	4.0131	0.99	0.3611	0.9985	-	-
X4	-1.8484	0.8588	-2.15	0.0749	0.9678	-1.8660	0.7737
X5	13.4133	12.475	1.08	0.3236	0.9998	1.5628	1.1945
X6	-2.0819	0.9199	-2.26	0.0643	0.9719	-2.1686	0.7962
X7	7.7582	6.4627	1.20	0.2752	0.9994	1.6543	1.0931
X8	0.3259	0.2747	1.19	0.2803	0.6851	0.2921	0.1893
X9	4.7475	5.2379	0.91	0.2803	0.9991	-	-

觀察表 4.26 中各個變數之決定係數 R_j^2 值，得知計有 7 個變數的 R_j^2 超過 0.9，而另外兩個變數的 R_j^2 分別為 0.4041 及 0.6851。由此可知本例大多數的 VIF_j 值均很大，即變數間有極強的線性關係，此結果與由條件數判斷共線性強弱程度的結論一致。依據表 4.26 中對個別變數進行 t-檢定後得到的 p 值，我們發現除了 X2，X4，X6 外個別檢定的結果均不顯著。但對整體模型進行 F 檢定時，結果卻是顯著的，此表示有些變數是可刪除的。本例中保留全部的 9 個主成份時的殘差平方和為 0.14256，而自由度為 6 的均方誤為 0.02376。此例使用的仿 F-型檢定統計量同例一，且 $F_{0.25}(1,6) = 1.62$ 係我們決定保留或刪除變數的臨界點。

與例一的處理方式相同，在區分為四種不同狀況下，我們將“加上限制條件 $a_j \in [0,1]$ ”和“未加上限制條件 $a_j \in [0,1]$ ”時，執行 M.W.G. 變數刪除的結果分別表列如後，以便進行分析、比較。

註：後退刪除法中剔除了變數 X3、X9，故表中對應格內的值沒有，以“-”顯示。

狀況一：不刪除對應於較小的特徵值之主成分、採用 M.W.G 原方法

(1) 未加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.27 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	0	X3-C	0.0898	刪除 X3
2	0	X1-T	0.7692	再刪 X1
3	0	X8- H^2	2.4688	停止,不刪 X8

表 4.28 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數	標準差
X1-T	0	0.3743
X2-H	-0.4833	0.1562
X3-C	0	0.5192
X4- T×H	-1.8674	0.6511
X5- T×C	1.5627	3.9330
X6- C×H	-2.1702	0.6942
X7- T^2	1.6545	0.5514
X8- H^2	0.2921	0.2114
X9- C^2	-0.7887	2.1269

表 4.29 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1.2002	0.9679	0.8692	0.9886	0.9486	0.3777	1.2206	0.3014	0.9648

(2) 加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.30 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	0	X3-C	0.1040	刪除 X3
2	0	X8- H^2	2.8893	停止,不刪 X8

表 4.31 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數
X1-T	0.3782
X2-H	-0.4634
X3-C	0
X4- T×H	-1.8654
X5- T×C	1.5022
X6- C×H	-2.1950
X7- T^2	0.8218
X8- H^2	0.2405
X9- C^2	-0.7738

表 4.32 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
0.9999	1	1	1	1	1	1	0.2726	0.9675

註：加了限制條件 $a_j \in [0,1]$ 後係數估計無法以公式表示，故表 4.31 未列出其標準差。

狀況二：刪除對應於較小的 2 個特徵值之主成分、採用 M.W.G.原方法

(1) 未加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.33 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	2	X5-T×C	0.1560	刪除 X5
2	2	X1-T	0.0721	刪除 X1
3	2	X9- C^2	1.2503	刪除 X9
4	2	X8- H^2	4.3446	停止,不刪 X8

表 4.34 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數	標準差
X1-T	0	0.1265
X2-H	-0.4916	0.1371
X3-C	-0.6550	0.0173
X4- T×H	-1.5763	0.0707
X5-T×C	0	0.0144
X6- C×H	-1.8424	0.0616
X7- T^2	0.6919	0.0141
X8- H^2	0.3307	0.1480
X9- C^2	0	0.3437

表 4.35 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1.7509	0.8990	0.9004	0.8732	0.9341	2.0711	0.9047	0	0

(2) 加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.36 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	2	X5-T×C	0.2400	刪除 X5
2	2	X1-T	0.1003	刪除 X1
3	2	X8- H^2	4.1997	停止,不刪 X8

表 4.37 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數
X1-T	0
X2-H	-0.4688
X3-C	-0.6120
X4- T×H	-1.4416
X5-T×C	0
X6- C×H	-1.6969
X7- T^2	0.6408
X8- H^2	0.3186
X9- C^2	-0.2995

表 4.38 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
0.8398	1	1	1	1	1	0.7451	0	0

註：加了限制條件 $a_j \in [0,1]$ 後係數估計無法以公式表示，故表 4.37 未列出其標準差。

狀況三：不刪除對應於較小的特徵值之主成分、採用 M.W.G改良法

(1) 未加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.39 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	0	X3-C	0.0898	刪除 X3
2	0	X9- C^2	0.0171	再刪 X9
3	0	X5-T×C	1.9958	停止,不刪 X5

表 4.40 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數	標準差
X1-T	0.3565	0.2121
X2-H	-0.4883	0.1449
X4- T×H	-1.8674	0.6409
X5- T×C	1.5627	0.9898
X6- C×H	-2.1702	0.6732
X7- T^2	1.6545	0.9060
X8- H^2	0.2921	0.1568

表 4.41 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
0.9984	1.0017	0.9998	1.0001	1.0002	0.9758	1.0009

註：採改良法在最後模型中僅剩 7 個變數，故表 4.41 中矩陣 A 大小只有 7×7。

(2) 加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.42 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	0	X3-C	0.1040	刪除 X3
2	0	X9- C^2	0.0176	刪除 X9
3	0	X7- T^2	2.8421	停止,不刪 X7

表 4.43 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數
X1-T	0.3753
X2-H	-0.4641
X4- T×H	-1.8900
X5- T×C	1.5329
X6- C×H	-2.2215
X7- T^2	0.8331
X8- H^2	0.2399

表 4.44 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
0.9984	1	1	1	1	0.9753	1

註 1：採改良法在最後模型中僅剩 7 個變數，故表 4.44 中矩陣 A 大小只有 7×7。

註 2：加了限制條件 $a_j \in [0,1]$ 後係數估計無法以公式表示，故表 4.43 未列出其標準差。

狀況四：刪除對應於 2 個較小的特徵值之主成分、採用 M.W.G.改良法

(1) 未加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.45 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	2	X5-T×C	0.1560	刪除 X5
2	2	X7- T^2	0.0061	再刪 X7
3	2	X4-T×H	1.6506	停止,不刪 X4

表 4.46 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數	標準差
X1-T	0.6191	0.1414
X2-H	-0.4495	0.1446
X3-C	-0.3322	0.1375
X4- T×H	-0.3509	0.5666
X6- C×H	-0.5719	0.5765
X8- H^2	0.2936	0.1594
X9- C^2	-0.7856	0.0831

表 4.47 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_8	a_9
1.0132	0.9987	1.0020	1.0415	1.0005	0	0

註：採改良法在最後模型中僅剩 7 個變數，故表 4.47 中矩陣 A 大小只有 7×7。

(2) 加上 $a_j \in [0,1]$ 限制條件

表 4.48 自變數刪除過程

步驟	被刪之主成分個數	欲刪除的變數	F 值	結論
1	2	X5-T×C	0.0240	刪除 X5
2	2	X7- T^2	0.0068	再刪 X7
3	2	X4-T×H	2.5248	停止,不刪 X4

表 4.49 最後模型的係數估計

變數	迴歸係數
X1-T	0.4765
X2-H	-0.4601
X3-C	-0.2093
X4- T×H	-0.0549
X6- C×H	-0.2629
X8- H^2	0.3190
X9- C^2	0.3985

表 4.50 對角矩陣 A 之對角線元素 a_j 值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_8	a_9
1	0.9986	1	1	0.9075	0	0

註 1：採改良法在最後模型中僅剩 7 個變數，故表 4.50 中矩陣 A 大小只有 7×7。

註 2：加了限制條件 $a_j \in [0,1]$ 後係數估計無法以公式表示，故表 4.49 未列出其標準差。

4.2.2 結果分析

經觀察 4.2 節中各表的結果，可歸納出下列幾點結論：

1. 和前例的結果一樣，當限制條件 $a_j \in [0,1]$ 被加入模型後，不論在何種狀況下，被刪除變數的個數均不超過未加上限制條件時所刪除變數的個數。
2. 在前例中，如果加上限制條件 $a_j \in [0,1]$ ，則沒有任何變數被刪除掉。但在本例中，加了限制條件 $a_j \in [0,1]$ 後，仍有變數被刪除掉，其中的原因之一有可能是本例的多重共線性程度較為嚴重的緣故。
3. 在不考慮限制條件 $a_j \in [0,1]$ 時，比較表 4.33 與表 4.45，我們發現採用 M.W.G.改良法所刪除變數的個數反而少於採用 M.W.G.原方法所刪除的變數個數，此結果與 Mansfield et al.(1977)文中所言相違背。
4. 在不考慮 $a_j \in [0,1]$ 這個限制條件時，Mansfield et al. (1977)文中提到，事先刪除對應於較小特徵值的主成份會增加變數刪除的個數。當比較表 4.27 與 4.33、表 4.30 與 4.36、表 4.39 與 4.45、表 4.42 與 4.48 後，我們發現不論有無加上限制條件 $a_j \in [0,1]$ ，本例所呈現的結果都符合該文的說法。

5. 本例中，採用後退刪除法所刪除的變數與狀況三採用 M.W.G. 改良法(即表 4.39)時相同，且兩者的係數估計亦差距甚微。