# 第肆章　研究結果與討論

在研究結果的討論與分析中，為配合研究者在第一章所論述的研究目的，研究者將此章節分為三大部分的研究結果來進行探討：第一部分是由題目卷中的第一大題中，探討這 82 位接受施測的學生在學完圓錐曲線單元後，對拋物線與橢圓的圖像關係是否有區別的能力；第二部分則是從題目卷中的第二、第三、第四、第五大題中，來探討這 82 位接受施測的學生學完拋物線單元後，對其定義、方程式、開口方向以及其性質的認識與瞭解之情形；第三部分則是透過題目卷中的第六大題，觀察學生解決生活中拋物線問題的能力。

## 第一部分

## 第一節　拋物線方程式的判別

在拋物線的紙筆測驗中，第一大題是屬於「拋物線方程式的判別」，請學生從 19 個方程式中，找出能表示拋物線的方程式，題目如下：

一、請判斷下列那些方程式畫出來的圖形為拋物線，並將您所判斷的結果填入對應的括弧中。
（覺得該小題為拋物線者，請在括弧中畫“○”；覺得該小題不是拋物線者，請在括弧中畫“×”）

A、$(x-4)^2=5(y+1)^2$ ……………………（　）

B、$\sqrt{(3-x)^2+(5-y)^2}=|x+1|$ ……………………（　）

C、$7y^2+2x=0$ ……………………（　）

D、$7y^2+2y+2x=0$ ……………………（　）

E、$7y^2+2y+2x+1=0$ ……………………（　）

F、$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+y|}{2}$ ……………………（　）

G、$\sqrt{2x^2+2y^2}=|x-y-1|$ ……………………（　）

| |
|---|
| H、$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\|y+1\|$ ……………………………………………（ ） |
| I、$7y^2=0$ ……………………………………………………………（ ） |
| J、$7y^2=1$ ……………………………………………………………（ ） |
| K、$3y^2=x-5$ …………………………………………………………（ ） |
| L、$3y^2=x^2+1$ ………………………………………………………（ ） |
| M、$2x^2-4x=5y+1$ …………………………………………………（ ） |
| N、$(x-5)^2=3y$ ………………………………………………………（ ） |
| O、$x=3y^2+y$ ………………………………………………………（ ） |
| P、$y=3x^2+1$ ………………………………………………………（ ） |
| Q、$y=3y^2+1$ ………………………………………………………（ ） |
| R、$y=3x^2+x+1$ ……………………………………………………（ ） |
| S、$y=3y^2+x+1$ ……………………………………………………（ ） |

## 一、答題結果分析

### （1）各小題的答對率

表 4-1-1　「拋物線方程式的判別」答對率

| 是拋物線或非拋物線 | 題號 | 需經過移項或配方整理 | 型（1）：標準式<br>型（2）：一般式<br>型（3）：定義式<br>型（4）：非以上類型者 | 答對率（%） |
|---|---|---|---|---|
| 是拋物線 | B | × | 型（3） | 76.8 |
| | C | ˅ | 型（1） | 81.7 |
| | D | ˅ | 型（2） | 79.3 |
| | E | ˅ | 型（2） | 80.5 |
| | G | ˅ | 型（3） | 26.8 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | K | ˇ | 型（1） | 89.0 |
| | M | ˇ | 型（2） | 85.4 |
| | N | × | 型（1） | 95.7 |
| | O | × | 型（2） | 80.5 |
| | P | × | 型（2） | 91.5 |
| | R | × | 型（2） | 90.2 |
| | S | ˇ | 型（2） | 64.3 |
| 不是拋物線 | A | × | 型（4），但類似型（1） | 76.8 |
| | F | × | 型（4），但類似型（3） | 41.5 |
| | H | × | 型（4），但類似型（3） | 26.8 |
| | I | × | 型（4），但類似型（1） | 80.5 |
| | J | × | 型（4），但類似型（1） | 63.4 |
| | L | × | 型（4），但類似型（1） | 86.6 |
| | Q | × | 型（4），但類似型（2） | 65.9 |

由表 4-1-1 中可知在拋物線方程式的判別上，我們可以看出各小題的答對率，若將各小題依結果“是拋物線的方程式”與“不是拋物線的方程式”來探討學生的作答情形，我們可由下圖 4-1-1 與圖 4-1-2 清楚地比較出各小題的答對率。

圖 4-1-1　「是拋物線方程式」答對率之長條圖

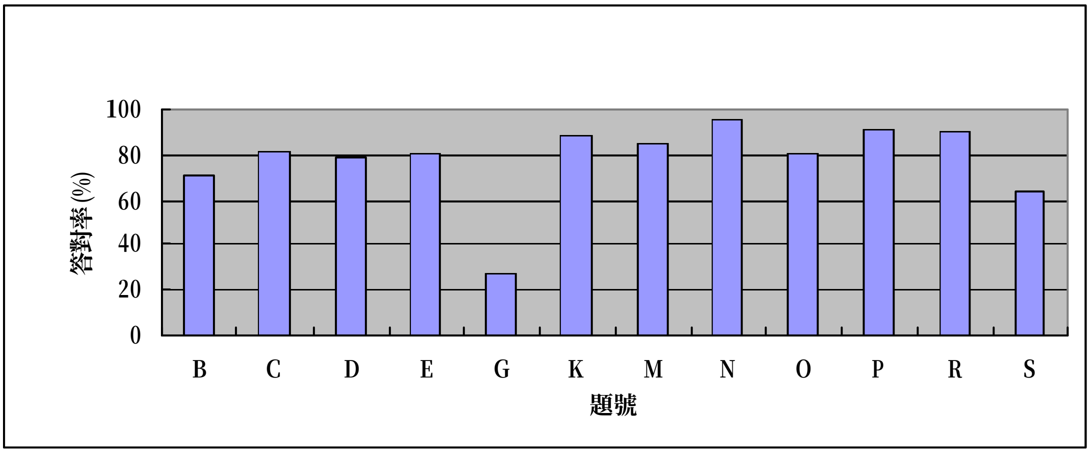
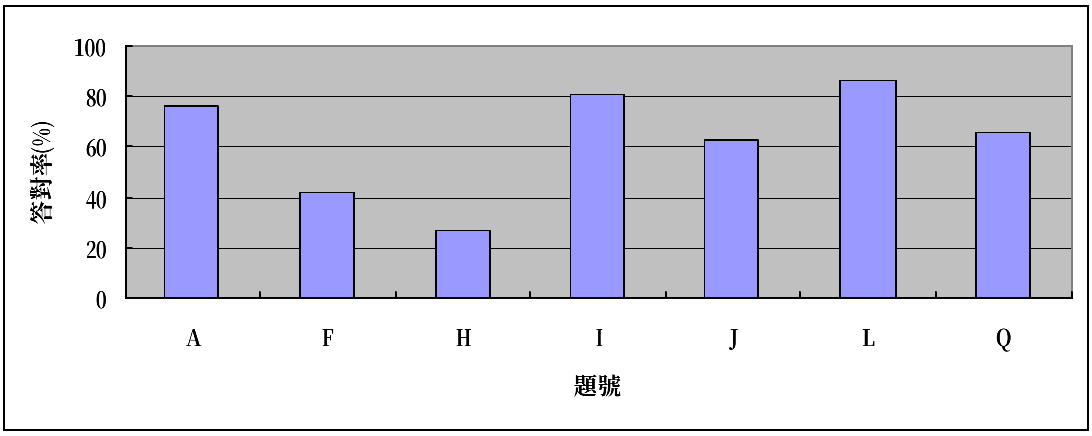


圖 4-1-2　「不是拋物線方程式」答對率之長條圖




在“是拋物線的方程式”中，N 小題的答對率最高（95.7%），次高者為第 P 小題，其答對率為91.5%，接下來為第 R 小題，其答對率為90.2%。觀察這三個小題的題目，N 小題題目為$(x-5)^2=3y$，這是高二拋物線課程導出的標準式$(x-h)^2=4c(y-k)$的型；至於 P 小題的題目$y=3x^2+1$與 R 小題的題目$y=3x^2+x+1$，其方程式的形式就是高一學過的二次函數。這三個小題題目的共同之處都是不須透過移項或配方就能找出對應的方程式。答對率最低的題目則是 G 小題，答對率只有26.8%。G 小題的題目為$\sqrt{2x^2+2y^2}=|x-y-1|$，這一題需經過移項觀察出$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}$是以焦點為$(0,0)$且準線為$x-y-1=0$的拋物線定義式；答對率次低的則是 S 小題，答對率為64.3%，S 小題的題目為$y=3y^2+x+1$，此題只要移項即可得到$x=-3y^2+y-1$，這是屬於拋物線的一般式。答錯率最高的這兩題都是需經移項後才能找出其對應的方程式。

在“不是拋物線的方程式”中，L 小題的答對率86.6%為最高，其題目為$3y^2=x^2+1$，畫出來的圖形為雙曲線。另外次高的答對率為 I 小題的80.5%，其題目為$7y^2=0$，對應的圖形是兩重合直線。至於答對率較低的則是 H 小題的26.8%與 F 小題的41.5%，H 小題的題目是$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=|y+1|$，這似乎是屬於拋物線的定義式，但在仔細檢查會發現，若其為拋物線，則準線為$y+1=0$，焦點在$(0,-1)$，將導致焦點會落在準線上，這是不合理的。F 小題的題目為

$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\frac{|x+y|}{2}$，這也是類似拋物線的定義式，等號左邊是拋物線上一動點 $P(x,y)$ 與一定點 $F(-1,2)$ 的兩點距離公式，等號右邊應該要是動點 $P(x,y)$ 與直線 $L: x+y=0$ 的點到直線距離公式，也就是 $\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}$。這兩個答錯率較高的題目都是屬於類似拋物線定義式的式子。

由以上結果可知，學生在判斷拋物線方程式時，以方程式為不用移項的標準式 $(x-h)^2=4c(y-k)$ 或一般式 $y=ax^2+bx+c$ 最容易判斷出其為拋物線，對較複雜的定義式或需移項才能對應到標準式或一般式的式子，學生往往容易判斷錯誤。

（2）三種類型的答對率及相關係數

此大題主要是測試學生是否能清楚地分辨出拋物線方程式，研究者將屬於拋物線方程式中的各小題分別歸類於拋物線的標準式、一般式、以及定義式，其他非拋物線方程式的式子，則歸類於與它類似的上述三者之一，因此被歸類為標準式測試的有 A、C、D、E、I、J、K、L、M、N 小題；被歸類為一般式測試的有 O、P、Q、R、S 小題；被歸類為定義式測試的有 B、F、G、H 小題。若以此方式將各小題分別歸於這三種類型，我們可以從學生的作答表現比較出這三種類型的答對率及其之間的相關係數：

表 4-1-2　標準式、一般式、以及定義式的答對率及相關係數

| | 1、標準式 | 2、一般式 | 3、定義式 |
|---|---|---|---|
| 答對率 | 81.1% | 78.3% | 41.5% |
| 相關係數 | $R_{1,2}=0.44$；$R_{1,3}=0$；$R_{2,3}=0$ | | |

從上表可以知道學生對於拋物線方程式的判斷方法中，以標準式最為熟悉，其次為一般式，而因定義式的式子較為複雜，且還須具備有幾何概念來作連結，因此學生對以定義式來判斷拋物線方程式較為困難。此外，從相關係數中的數據我們可以發現，高二學生在標準式與一般式的能力表現上呈現中度正相關，定義

式與其它兩種方程式之間則呈現零相關，這也表示學生在標準式與一般式的學習方式上具備了某種程度的連結，但對於定義式的學習則較為獨立。

## 二、訪談資料分析

研究者為了進一步瞭解學生的想法，並分析探討學生作答錯誤的原因，因此依學生的答題結果將學生分成高分組、中分組、低分組，從各組中分別找三位學生進行訪談，其中高分組為 B1，B2，B3，中分組為 B4，B5，B6，低分組為 B7，B8，B9。

### （一）正確答題的想法

在全部的 82 位作答學生中，第一大題並無人將這 19 個小題完全答對。在接受訪談的學生中，S2（高分組）做錯了 F、G、H 三個小題，S3（高分組）做錯了 G、H 兩個小題；而 S5（中分組）做錯了 G、H、Q 三個小題，S6（中分組）做錯了 F、H 兩個小題。從這些學生作答錯誤較高的幾題中，發現這幾題幾乎都是拋物線定義式的題型，尤其 G、H 這兩個小題更是這 82 位作答學生在作答結果統計資料中錯誤率最高的題目。除了這幾題外，研究者將其餘的題目對 S2、S3、S5、S6 作了訪談，發現他們在判斷拋物線方程式的過程中，會習慣與剛學完的拋物線標準式來對應，並從中自行歸納出一些判斷方法：(1) 化成標準式或一般式來判斷；(2) 一般式中的 $x$ 和 $y$ 只能有一個平方；(3) 方程式中一定要有 $x$ 和 $y$ 這兩個變數；(4) 方程式的係數對判斷結果無影響。

#### 1、化成標準式或一般式來判斷

S6（中分組、女）

T：E 小題妳覺得它是拋物線方程式嗎？

S6：是。

T：妳是怎麼判斷的呢？

S6：我可以對 $7y^2+2y+2x+1=0$ 這個方程式作整理：

$$7\left[y^2+\frac{2}{7}y+(\frac{1}{7})^2\right]=-2x-1+7(\frac{1}{7})^2$$

$7(y+\frac{1}{7})^2=-2x-\frac{6}{7}$，**這樣就是拋物線方程式了。**

**T：那麼 O 小題妳又是如何判斷的呢？**

**S6：我也是對** $x=3y^2+y$ **中的** $y$ **配方：**

$$x=3\left[y^2+\frac{1}{3}y+(\frac{1}{6})^2\right]-3(\frac{1}{6})^2$$

$3(y+\frac{1}{6})^2=x+\frac{1}{12}$，**這個就是拋物線方程式了。**

**T：L 小題** $3y^2=x^2+1$ **是不是拋物線方程式呢？**

**S6：不是，如果是拋物線方程式，那配方後應該是** $(x-h)^2=4c(y-k)$ **或** $(y-k)^2=4c(x-h)$ **的型式才對，L 小題不是。**

S5（中分組、男）

**T：你覺得 E 小題是拋物線方程式嗎？**

**S5：是啊，只要把** $7y^2+2y+2x+1=0$ **這個方程式同除 2 再移項後，就會發現了。**

**T：發現什麼呢？**

**S5：發現它可以被我化成** $x=\frac{-7}{2}y^2-y-\frac{1}{2}$ **，這樣就是拋物線方程式了。**

從研究者與 S6 的訪談中，可以知道 S6 是先將題目的式子嘗試化成拋物線的標準式，若這個式子可以被化成 $(x-h)^2=4c(y-k)$ 或 $(y-k)^2=4c(x-h)$ 形式的標準式，那麼它就是拋物線方程式了。而 S5 則是先試著將各小題中的式子化成型如 $y=ax^2+bx+c$ 或者是 $x=ay^2+by+c$ 的拋物線一般式，如果能被化為拋物線的一般式，那麼這個小題的式子就是拋物線方程式。

從研究者與 S5、S6 的訪談中，可以知道他們判斷拋物線方程式的主要原則是先將題目所給的方程式盡可能化到自己所熟悉的拋物線標準式或一般式，並從能否轉化成功來判斷該小題是否為拋物線方程式。

2、一般式中的 $x$ 和 $y$ 只能有一個平方

S2（高分組、女）

**T：妳覺得 A 小題 $(x-4)^2=5(y+1)^2$ 是拋物線程式嗎？**

**S2：不是，如果 $(x-4)^2=5(y+1)$，那就是了。**

**T：那如果 $x-4=5(y+1)^2$，是不是拋物線方程式呢？**

**S2：是，只有一邊平方才是，兩邊都平方的不是。**

**T：那 D 小題 $7y^2+2y+2x=0$ 呢？**

**S2：它是拋物線方程式，因為它只有 $y$ 有平方，$x$ 並沒有。**

S3（高分組、男）

**T：M 小題 $2x^2-4x=5y+1$ 是不是拋物線方程式？**

**S3：是，因為它可以化為 $(x-h)^2=4c(y-k)$ 的型式。**

**T：你用心算的嗎？**

**S3：我沒有算，我只是覺得只要 $x$ 和 $y$ 中有一個是有平方的，那就可以寫成**

**$(x-h)^2=4c(y-k)$ 或 $(y-k)^2=4c(x-h)$。**

從研究者與 S2、S3 的訪談中，可以知道他們在判斷拋物線方程式時，會以“平方項”來作觀察，如果方程式只有 $x$ 有平方項或者只有 $y$ 有平方項，那表式這個方程式一定可以寫成拋物線標準式或拋物線的一般式。也就是說，不需要經過動筆來移項或配方處理題目所給的方程式，只需要透過觀察“平方項”的這種方式就能作判斷了。

3、一定要有 $x$、$y$ 這兩個變數

S2（高分組、女）

**T：I 小題 $7y^2=0$ 這個方程式只有 $y$ 有平方項，妳覺得它是拋物線方程式嗎？**

**S2：這個方程式我覺得怪怪的，它應該不是拋物線方程式吧！**

**T：為什麼呢？**

**S2：因為它沒有 $x$，<u>拋物線方程式應該都要有 $x$ 和 $y$</u>。**

**T：妳怎麼會認為拋物線方程式應該要有 $x$ 和 $y$ 呢？**

**S2：像 $(y-1)^2 = 4(x-5)$ 是拋物線方程式，它展開來就會有 $x$ 和 $y$，不會有一個不見了才對。**

S3（高分組、男）

**T：I 小題 $7y^2 = 0$ 只有 $y$ 是有平方的，那你覺得它是拋物線方程式嗎？**

**S3：它不是吧，因為它沒有 $x$ 項。**

**T：是指 $x$ 的一次方項嗎？**

**S3：是的。**

**T：那我改成 $7y^2 = x$，這樣你認為它是拋物線方程式嗎？**

**S3：是。**

**T：那我改成 $7y^2 = y$，這樣你認為它是拋物線方程式嗎？**

**S3：不是，<u>題目已經有 $y$ 的話，就還要有一個 $x$ 才行，否則不能配成 $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ 或 $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ 的拋物線方程式</u>。**

**從研究者與 S2、S3 的訪談中，可以知道除了拋物線方程式裡一定會出現 $x$ 與 $y$ 這兩個變數，如果只出現 $x$ 與 $y$ 這兩個變數中的一個，則會因移項或配方後無法化成 $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ 或 $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ 的型式，而不屬於拋物線方程式。**

4、係數不影響判斷結果

S3（高分組、男）

**T：那我將 $7y^2 = y$ 再改成 $7y^2 = 100y$，你認為呢？**

**S3：這樣還是不行，這跟有幾個 $y$ 無關。**

S5（中分組、男）

**T：如果把 $7y^2+2y+2x+1=0$ 這個方程式改成 $8y^2+20y+3x+1=0$，那你覺得他是拋物線方程式嗎？**

**S5：那我就同除以 3 啊，我可以得到 $x=\frac{-8}{3}y^2-\frac{20}{3}y-\frac{1}{3}$，它還是拋物線。**

**T：那我改成 $50y^2-56y+71x+1=0$，你覺得呢？**

**S5：我可以同除以 71 啊，<u>這跟幾倍無關，反正我除掉之後都一樣</u>。**

由研究者與 S3、S5 的訪談中，可以知道 S3 和 S5 瞭解方程式的係數並不會影響其判斷的結果。

綜合以上的訪談結果，學生認為不管題目是什麼樣子的方程式，只要可以透過方程式的整理化成 $(x-h)^2=4c(y-k)$ 或 $(y-k)^2=4c(x-h)$ 的型式，那麼這個方程式就是拋物線方程式了。

（二）容易產生的困難

學生在判斷方程式是否為拋物線方程式時，從統計資料中發現錯誤率最高的是以定義式來表示拋物線的類型，因這種類型的判讀需有幾何意義的概念來作連結，也因此比起標準式與一般式的公式化較為困難多了。在這一大題的測試中，B、F、G、H 這四個小題都是屬於這一類型的題目，而只有 B 小題的答對率超過了 $60\%$，其它 F、G、H 三個題的答對率則都是在 $60\%$ 以下。另外，從訪談中也發現學生在判斷時有一些其它錯誤的想法，研究者從答對率與訪談資料將學生的錯誤類型整理如下：第一類型：不熟悉定義式；第二類型：認為 $y=ay^2+bx+c$ 不是拋物線方程式；第三類型：認為 $x$ 和 $y$ 這兩項中，只要有一項有平方就是拋物線方程式；第四類型：認為拋物線方程式裡應該會有常數項。在訪談了高分組（S1，S2，S3）、中分組（S4，S5，S6）、低分組（S7，S8，S9）後，發現高分組的學生主要都是出現第一類型的錯誤，而中分組的學生除了會犯第一類型的錯誤

外，還參雜著第二、三、四類型的錯誤。

**第一類型：不熟悉定義式**

這類型的錯誤率較高，經過訪談後，研究者針對學生錯誤的原因將其大致上做個分類：(1) 展開後不能有 $xy$ 項；

(2) 定義式的類型 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 中，左式根號裡的係數應是 1；

(3) 定義式的類型 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 中，右式的分母搞不清楚；

(4) 未檢查焦點的位置。

1、展開後不能有 $xy$ 項

S9（低分組、女）

T：B 小題 $\sqrt{(3-x)^2+(5-y)^2}=|x+1|$，你覺得它是拋物線方程式嗎？

S9：是，我把它平方展開後發現它可以寫成 $(y-5)^2=8(x-1)$，這是拋物線方程式。

T：那麼 G 小題 $\sqrt{2x^2+2y^2}=|x-y-1|$，你覺得它是拋物線嗎？

S9：它展開後變成 $x^2+y^2-2x-2y+2xy-1=0$，<u>我不知道怎麼對 $2xy$ 來配方，應該沒有這一項比較像拋物線方程式</u>。

2、定義式的類型 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 中，左式根號裡的係數應是 1

S4（中分組、女）

**T：妳覺得 G 小題$\sqrt{2x^2+2y^2}=|x-y-1|$是拋物線方程式嗎？**

**S4：我覺得看起來不太像。**

**T：為什麼？**

**S4：因為<u>它等號左邊的根號裡應該要寫成$\sqrt{x^2+y^2}$，應該不能有 2 倍吧</u>！**

**T：那如果改成$\sqrt{x^2+y^2}=|x-y-1|$呢？**

**S4：那就是拋物線方程式了。**

**T：妳怎麼知道的呢？**

**S4：左邊可以寫成$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$，可以想成和點$(0,0)$的距離，右邊可以找出準線是$x-y-1=0$，剛剛說的點$(0,0)$就是拋物線的焦點。**

3、定義式的類型$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$中，右式的分母搞不清楚

S04（中分組、女）

**T：那$\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{|x-y-1|}{2}$呢？妳覺得它是拋物線嗎？**

**S4：等等，應該這個才是，剛剛那個$\sqrt{x^2+y^2}=|x-y-1|$不是！**

**T：為什麼改變想法了？**

**S4：我剛剛沒有注意到，<u>右邊好像應該要除一個數才對</u>！**

S7（低分組、女）

**T：B 小題$\sqrt{(3-x)^2+(5-y)^2}=|x+1|$妳覺得是拋物線方程式嗎？**

**S7：是啊！**

**T：那麼 F 小題$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+y|}{2}$妳覺得它是拋物線方程式嗎？**

**S7：是啊！**

T：可是它們等號右邊的分母不一樣，為什麼 F 小題等號右邊的分母要除 2？

S7：因為它的分子有 $x$ 和 $y$ 這兩項啊，B 小題的只有 $x$ 一項而已。

4、未檢查焦點的位置

S3（高分組、男）

T：你覺得 H 小題 $\sqrt{x^2+(y+1)^2}=|y+1|$ 是拋物線方程式嗎？

S3：是。

T：你從這個式子裡有讀出什麼嗎？

S3：從定義來看吧，我可以讀出它是焦點為 $(0,-1)$，準線為 $y+1=0$ 的拋物線。

T：你可以說明一下焦點和準線的位置關係嗎？

S3：準線是一條鉛直線，然後旁邊有一個點 $(0,-1)$

T：你試試看把準線和焦點畫在直角座標系上。

S3：(畫圖)，不對，這個焦點在準線上了，這樣應該不能形成拋物線才對。

綜合以上的訪談，可以發線學生對於拋物線定義式的不熟悉，大部分原因是因為對這種方程式對應到的幾何意義不太瞭解，尤其是在點到直線距離公式的部分沒有那麼清楚，以致對於等號右邊的分母該除多少無法做出正確判斷。

第二類型：認為 $y=ay^2+bx+c$ 不是拋物線方程式。

S4（中分組、女）

T：R 小題 $y=3x^2+x+1$ 妳覺得是拋物線方程式嗎？

S4：是。

T：S 小題 $y=3y^2+x+1$ 是拋物線方程式嗎？

S4：不是。

T：這兩個方程式不是很像嗎？

S4：可是 S 小題把等號右邊的 $x^2$ 改成 $y^2$，這樣就不是了。

從以上的訪談可以知道，將 $y=ax^2+bx+c$ 與 $y=ay^2+bx+c$ 的題型擺在相鄰兩題來判斷時，學生會認為 $y=ay^2+bx+c$ 的型式不是拋物線方程式，這主要是因為受到前一題的影響而失去了正確的判斷。

第三類型：認為 $x$ 和 $y$ 這兩項中只要有一個有平方就是拋物線方程式。

S8（低分組、男）

T：Q 小題 $y=3y^2+1$ 是拋物線方程式嗎？

S8：是。

T：L 小題 $3y^2=-x^2+1$ 是拋物線方程式嗎？

S8：是。

T：你是怎麼判斷的呢？

S8：<u>應該有平方就是拋物線方程式吧</u>。

從訪談中可以知道 S8 認為不管是 $x$ 有平方項或 $y$ 有平方項，甚至是 $x$ 和 $y$ 兩個都出現平方項，只要有看到平方項就是拋物線方程式了。

第四類型：認為拋物線方程式裡應該要有常數項

S9（低分組、女）

T：C、D、E 這三個小題中，妳覺得有那一個或那幾個是拋物線方程式？

S9：C、D 都不是，E 這一題是。

T：妳是怎麼判斷的呢？

S9：C 和 D 這兩題都沒有常數項，E 這一題有常數項。

T：妳是用有沒有常數項來判斷的？

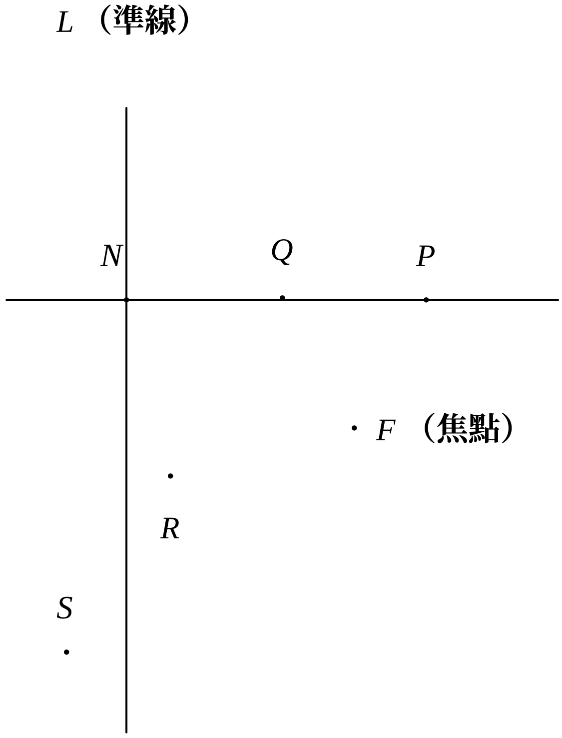
S9：<u>我覺得拋物線方程式應該都會有常數項</u>。

從訪談中可以知道，S9 從方程式裡常數項的有無作是否為拋物線的判斷。

## 第二節　從圖形中判斷拋物線上的點

在拋物線的紙筆測驗中，第二大題是屬於「從圖形中判斷拋物線上的點」的題型，命題方式是以拋物線的定義為主要概念，配合著拋物線的定義來找出圖形中符合條件的拋物線上的點。題目如下：

二、有一拋物線$\Gamma$之準線$L$為鉛直線且$N$為準線上之一點，點$F$為此拋物線$\Gamma$之焦點，且平面上另有$P,Q,R,S$四點，其中$P,Q$兩點與點$N$在同一水平線上，如圖（一）所示：




圖（一）

今連接$\overline{NF}$，並作$\overline{NF}$之中垂線後，發現$Q,R,S$三點皆在此中垂線上，則下列那一點是拋物線$\Gamma$上的點？並請說明您判斷的理由。

1、點$P$＿＿＿＿＿＿（是/不是/無法確定是或不是）拋物線$\Gamma$上的一點，

理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

2、點$Q$＿＿＿＿＿＿（是/不是/無法確定是或不是）拋物線$\Gamma$上的一點，

理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

3、點 $R$ ＿＿＿＿＿＿＿（是/不是/無法確定是或不是）拋物線 $\Gamma$ 上的一點,

理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

4、點 $S$ ＿＿＿＿＿＿＿（是/不是/無法確定是或不是）拋物線 $\Gamma$ 上的一點,

理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

5、點 $N$ ＿＿＿＿＿＿＿（是/不是/無法確定是或不是）拋物線 $\Gamma$ 上的一點,

理由：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

一、答題結果分析

這五個小題中只有第 2 小題點 $Q$ 為符合題目條件的拋物線上的點, 其餘四個點（$P, R, S, N$）皆不為此條件下之拋物線上的點。學生的作答表現情形如下：

表 4-2-1　「從圖形中判斷拋物線上的點」答對率

| 題目／人數百分比 | 二（1） | 二（2） | 二（3） | 二（4） | 二（5） |
|---|---|---|---|---|---|
| 判斷結果正確 | 63.4％ | 65.8％ | 81.7％ | 96.3％ | 100％ |
| 理由論述正確 | 50％ | 51.2％ | 57.3％ | 74.3％ | 85.3％ |

從答題的情形可以看出，答對率較高的是第 5 小題的點 $N$，答對率較低的則是第 1 小題的點 $P$，這兩個點都不是符合條件的拋物線上的點。

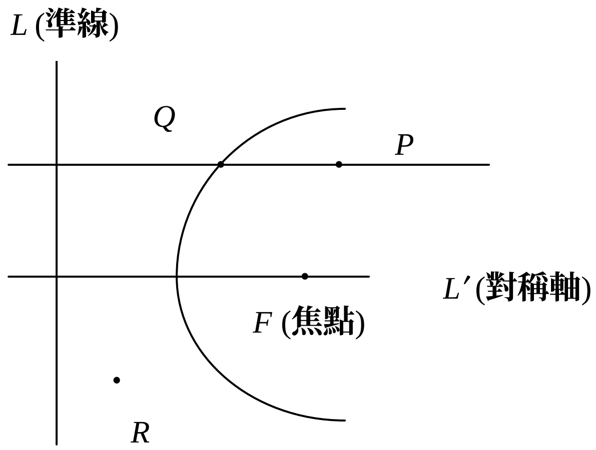
二、試題分析

這一個題目並沒有方程式或點坐標, 只有圖形的相對位置以及與拋物線相關的名詞, 根據題意, 要找出拋物線上的點只需有拋物線定義的概念即可, 有些點也可從圖形的位置來判斷出有沒有可能為此拋物線上的點. 題目首先給出了準線為鉛直線且焦點在準線右邊的圖形, 從這一個條件可知道此拋物線的開口方向應

**該要朝向右方，又拋物線上的點不會和焦點分開在準線的異側，所以點$S$不可能是此拋物線上的點。當然從定義也可看出$\overline{SF} \neq d(S,L)$，因此點$S$不會落在以$L$為準線，以$F$為焦點的拋物線上。同理，因為$\overline{NF} \neq d(N,L)=0$，所以點$N$也不會落在這個拋物線上。**

**至於要判斷$P,Q,R$三點是否為拋物線上的點，則需要較客觀的距離條件。從題目中的敘述："連接$\overline{NF}$，並作$\overline{NF}$之中垂線後，發現$Q,R,S$三點皆在此中垂線上"，結合國中學過的"中垂線上的點到線段的兩端點等距"之概念，可以得知點$Q$滿足了拋物線的定義，所以其為拋物線上的點。而點$S$從剛剛的討論已經知道其不可能為拋物線上的點了，就剩下對點$R$的判斷了，從圖形可以很明確看出$\overline{RF} > d(R,L)$，因此點$R$也不會是此拋物線上的點。其實點$R$也可從另一個角度來判斷，我們可以先畫出拋物線的樣子，並將它的對稱軸也畫出來，那麼很清楚地可以看到點$R$在對稱軸下方且偏左，如下圖所示，所以點$R$根本不可能是此拋物線上的點。**

**圖 4-2-1　「從圖形中判斷拋物線上的點」之解說圖**




**最後，剩下對點$P$的判斷了。從題意知道$P,Q$兩點位於同一條水平直線上，因此直線$PQ$與對稱軸$L'$是平行的，既然拋物線已確定通過點$Q$了，則點$P$就不可能落在此拋物線上，否則將會造成拋物線的開口會再縮小回去。此外，從定義**

上亦可看出 $\overline{PF} < d(P, L)$，即點 $P$ 並不滿足拋物線定義，所以點 $P$ 不會在這個拋物線上。

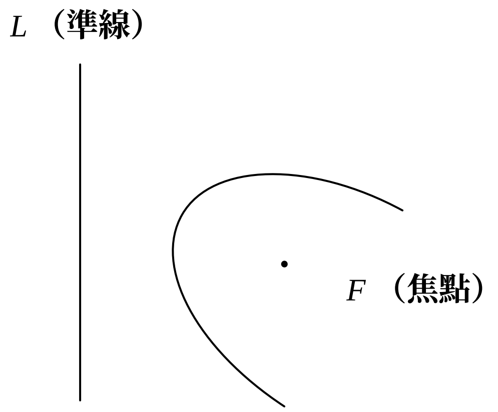
三、學生作答錯誤類型

從筆試資料與訪談的記錄中，觀察學生對於這樣一個給予圖形條件，進而找出拋物線上的點的題目，有以下幾個錯誤類型：

（一）畫出不符合條件的拋物線

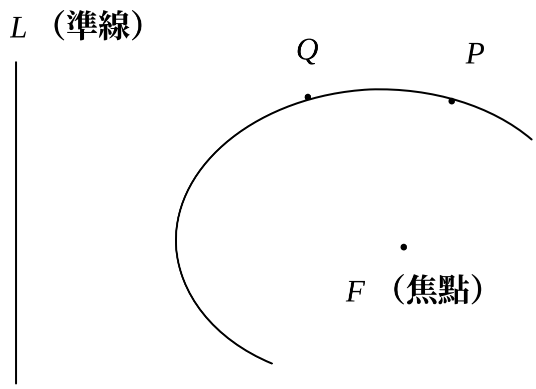
當題目已給出準線與拋物線的相對位置時，其實已可以大致畫出拋物線的樣子了。此題拋物線的準線為鉛直線，焦點在準線的右方，所以拋物線的開口應該要朝向右方的。然而卻有學生畫出如下圖的拋物線：

圖 4-2-2　「從圖形中判斷拋物線上的點」中錯誤繪圖之一




另外一種畫出不符合條件的拋物線則是將拋物線的開口縮小回去了，如下圖所示：

圖 4-2-3　「從圖形中判斷拋物線上的點」中錯誤繪圖之二



（二）以處理點$Q$的方式來處理點$R$

點$Q$是因為透過“中垂線上的點到線段的兩端點等距離”的性質，得到$\overline{QF}=\overline{QN}$，又$\overline{QN}=d(Q,L)$，故得$\overline{QF}=d(Q,L)$，因此點$Q$會落在以點$F$為焦點，直線$L$為準線的拋物線上。有學生認為既然點$Q$落在中垂線上的結果會導致點$Q$也會落在拋物線上，而點$R$跟點$Q$一樣都落在這個中垂線上，所以點$R$也應該會在拋物線上才對。

（三）認為點$R$是拋物線的頂點

因為點$R$是準線右側的所有點當中最接近準線的點，因此學生會將點$R$視為是拋物線的頂點。

（四）點$P$與點$Q$只會有一個在拋物線上

從拋物線的形狀來看，若已確定$Q$點就在這個拋物線上，那麼$P$點當然就不可能同一個拋物線上，否則將造成拋物線的開口縮小回去了。因此，“$P$點與$Q$點只會有一個在拋物線上”這個想法似乎是對的，然而一些學生卻無法分辨究竟那一點才會在拋物線上，因此作答時是以兩個點中任選一個點在拋物線上的方式來作答。

（五）要知道拋物線的方程式才能作判斷

有些學生認為題目未給拋物線方程式，條件不足，所以不能對$P$、$Q$、$R$三點做判斷。

四、訪談資料分析

（一）作答正確學生的想法

從高分組、中分組、與低分組這三組共九人的答題表現中，全對的有高分組的 S1、S2、S3 以及中分組的 S5、S6，這四人在判斷是否為拋物線上的點之結果皆正確，理由卻並不一定敘述得很完整，以下為正確答題者的訪談資料。

S2（高分組、女）

**T：你認為 Q 點有沒有在這個拋物線上？**

**S2：有。**

**T：為什麼這麼認為呢？**

**S2：Q 點到 L 的距離等於 Q 點到 F 的距離。**

**T：從什麼地方可以知道呢“Q 點到 L 的距離等於 Q 點到 F 的距離”？題目並沒有這個敘述吧！**

**S2：因為 Q 點是 $\overline{NF}$ 中垂線上的點，中垂線上的點到線段的兩端應該要等距。**

**T：那麼還有那些點是拋物線上的點呢？**

**S2：沒有了吧！其它的點都不在拋物線上。**

**T：R 點為什麼不是拋物線上的點？**

**S2：因為 $d(R,L)<\overline{RF}$**

**T：為什麼你知道是“$<$”呢？**

**S2：從題目的長度知道的。**

**T：那麼點 P 為什麼也不在拋物線上呢？**

**S2：從長度知道的，$\overline{NP}>\overline{PF}$**

**T：<u>題目有給長度是多少嗎</u>？**

**S2：<u>沒有，但一看就知道$\overline{NP}$比較長了</u>。**

**T：點 S 為什麼不是拋物線上的點呢？**

**S2：因為 $d(S,L)<\overline{SF}$**

**T：點 N 為什麼不是拋物線上的點？**

**S2：因為 $d(N,L)<\overline{NF}$**

**T：<u>這邊的“$<$”又是怎麼得知的呢</u>？**

**S2：<u>也是從圖形中就可以看出來了</u>。**

**從研究者與 S2 的訪談資料可以知道，除了點 $Q$ 的判斷是以“中垂線上的點到**

線段的兩端等距”而確定$\overline{NQ}$與$\overline{NF}$長度相等外，其它的線段大小關係完全是由圖中的長度比較出來的，也就是 S2 是透過題目所給予的圖形來比較長度的大小，進而代入拋物線方程式的定義來判斷$P$、$R$、$S$、$N$是否在拋物線上。

S3（高分組、男）

**T：你覺得 Q 點是拋物線上的點嗎？**

**S3：是，因為$\overline{QF}=\overline{QN}$。**

**T：你怎麼知道這兩個長度相等呢？**

**S3：<u>因為$Q$點在中垂線上</u>。**

**T：題目說 R 點和 S 點也在同一條中垂線上，那它們是拋物線上的點嗎？**

**S3：不是，兩個都不是。**

**T：為什麼呢？**

**S3：因為<u>$\overline{RF}\neq d(R,L)$</u>，還有<u>$\overline{SF}\neq d(S,L)$</u>**

**T：P 點在這個拋物線上嗎？**

**S3：P 點應該不會在上面吧，因為它比 Q 點還右邊，那它到準線 L 的距離就更大了。**

**T：你是指<u>$d(P,L)>d(Q,L)$</u>嗎？**

**S3：對呀，因為它比較右邊。**

**T：比點 Q 右邊的點都不會在拋物線上嗎？**

**S3：應該是吧！**

**T：那如果在點 Q 的右上方呢？有沒有可能會有點在拋物線上？**

**S3：在點 Q 的右上方應該有可能有，因為拋物線的開口是向右的。**

**T：你怎麼說明點 N 與拋物線的關係呢？**

**S3：<u>拋物線不會跟準線有交集，所以點 N 不會在拋物線上</u>。**

從與 S3 的訪談資料中可以知道，S3 除了能從題目的相對位置判斷出此拋物線的開口方向，也能由拋物線的定義正確說明點是否在拋物線上。

（二）作答錯誤學生的想法

S7（低分組、女）

T：妳覺得點 P 是拋物線上的點嗎？

S7：是。

T：為什麼呢？

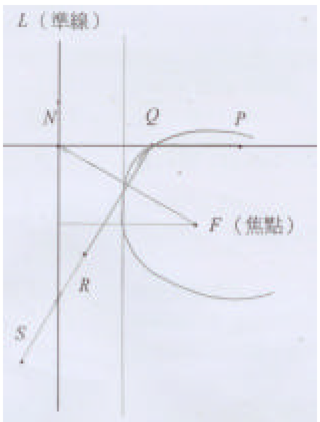
S7：因為<u>它在頂點和焦點的右邊，所以有可能</u>。

T：那麼妳認為 Q 點是拋物線上的點嗎？

S07：是，它也是在頂點的右邊。

T：頂點在那裡？

S07：(畫圖)




T：那麼 R 點是拋物線上的點嗎？

S07：不是，焦點到頂點的距離等於焦點到準線的距離，而 <u>R 點在頂點之後</u>。

從研究者與 S7 的訪談中得知，S7 找拋物線頂點的方式是用目測的，作焦點 F 到準線 L 的垂線後，直接點出線段的中點即為這個拋物線的頂點。S7 判斷點是否在拋物線上的方式為：在頂點或焦點右測的點都在拋物線上，在頂點或焦點左側的點都不會在拋物線上。另外，S7 畫出這個拋物線的圖形開口方向雖然沒有

錯誤，但其拋物線的形狀卻是錯誤的。

S4（中分組、女）

T：妳覺得 R 點是不是拋物線上的點？

S4：不能確定。

T：為什麼？

S4：因為 $\overline{RN}=\overline{RF}$，但不是 N 點的話就有可能不是。

T：不是 N 點？

S4：如果 R 點不是到 N 點的距離等於 $\overline{RF}$ 的話，那 R 點就不是拋物線上的點。

T：R 點如果不是到 N 點的距離，那麼 R 點是到那一個點的距離？

S4：R 點到 L 的距離呀！

T：還有 R 到那一個點或那一條直線的距離嗎？

S4：沒有了，如果是 R 點到直線 L 的距離的話，那就不會等於 $\overline{RF}$ 了，這樣 R 點就不會是拋物線上的點。

由研究者與 S4 的訪談資料中知道，S4 受到第 2 小題的影響，認為點 Q 滿足 $\overline{QN}=\overline{QF}$ 推得點 Q 在拋物線上，而由點 R 在同一條中垂線上知 $\overline{RN}=\overline{RF}$，所以點 R 也會在拋物線上；但如果是看 $d(R,L)$，則會因為 $d(R,L)\neq\overline{RF}$ 而判斷出 R 點不在拋物線上的結論。

S9（低分組、女）

T：妳認為 Q 點是拋物線上的點嗎？

S9：無法確定，要看拋物線的大小來決定。

T：妳認為 R 點是拋物線上的點嗎？

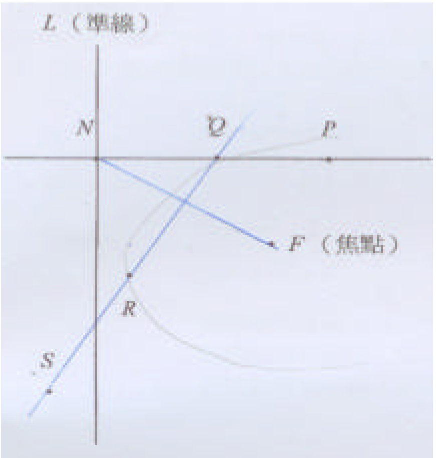
S9：是。

T：為什麼呢？

S9：因為拋物線會通過 R 點。

T：試著畫看看符合這一題條件的拋物線。

S9：(畫圖)




T：為什麼拋物線會通過 R 點？

S9：R 點在準線的右邊，很接近準線，應該是頂點。

T：那點 N 為什麼不在拋物線上？

S9：它離焦點太遠了！

T：點 P 為什麼不在拋物線上？

S9：它在焦點的右邊，所以不可能是拋物線上的點。

T：點 S 為什麼不在拋物線上？

S9：拋物線沒有通過點 S 。

T：為什麼拋物線沒有通過點 S 呢？

S9：……。

T：妳知道拋物線的定義嗎？

S9：應該是焦點和準線的關係吧！

從研究者與 S9 的訪談中知道，S9 在檢查點 P、點 N、點 S 是不是拋物線上的點時，並沒有用到任何拋物線定義的知識，當研究者進一步問 S9 拋物線的定義時，S9 顯然無法正確且完整地回答出來。從訪談與 S9 所畫的圖形中可以發現，

雖然其開口方向沒有錯，但對於拋物線會通過那些點完全是“為了要通過而通過”，對於認為 R 點是拋物線頂點的原因也沒有具有說服力的原因。

S8（低分組、男）

T：你覺得 P 點是拋物線上的點嗎？

S8：這不一定，我不知道方程式。

T：你覺得 Q 點是拋物線上的點嗎？

S8：也是一樣吧！

T：一樣？是什麼意思呢？

S8：跟 Q 點一樣啊，我不知道方程式，所以沒辦法確定。

T：你需要什麼東西的方程式才可以確定呢？

S8：要有焦點坐標和準線方程式，還要知道 P、Q、R 這三點的點坐標。

T：你覺得 R 點是拋物線上的點嗎？

S8：也不一定，不知道坐標就不能確定。

T：如果題目有給坐標和準線方程式，那你要怎麼判斷者三點是否在拋物線上？

S8：用距離來算，如果到焦點的距離跟到準線的距離相等，那它就是拋物線上的點了。

T：S 點跟 N 點呢？也是這樣判斷的嗎？

S8：這一看就知道它們都不是拋物線上的點。

T：為什麼呢？

S8：S 點在準線的另一側，所以不可能；N 點在準線上，也不可能！

從研究者與 S8 的訪談中，可以發現 S8 完全忽視了題目給予的中垂線的條件，而且 S8 非常依賴方程式，除了 S 點和 N 點這兩點可以很肯定不需透過方程式來判斷外，剩下的 P、Q、R 這三點都需要以方程式來代入定義式才能確定，而沒有辦法想到其它的幾何方式或圖形相對位置關係來解決。

## 第三節　開口方向的判斷

在拋物線的紙筆測驗中，第三大題是屬於「拋物線開口方向的判斷」的題型，瞭解高二學生分別從標準式、一般式、定義式，以及從準線、對稱軸、正焦弦等的走向來判斷拋物線的開口方向的表現能力，其試題如下：

三、試判斷符合下列方程式或其條件的拋物線開口方向，並將其所對應之開口方向填入括弧中。

A、開口朝上　　B、開口朝下　　C、開口朝左　　D、開口朝右

E、以上皆非

（做答時請以英文字母 A、B、C、D、E 填入括弧中；若您覺得答案不只一種時，請將可能的情況皆以英文代數符號填入括弧中）

1、(　　　　　)　　$-4(y-2)^2=7(x+1)$

2、(　　　　　)　　$3x^2-9y+1=0$

3、(　　　　　)　　$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\dfrac{|3x+1|}{3}$

4、(　　　　　)　　$x=5y^2+2$

5、(　　　　　)　　$\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{|3x+4y+5|}{5}$

6、(　　　　　)　　準線為鉛直線。

7、(　　　　　)　　對稱軸為鉛直線，焦距為 5

8、(　　　　　)　　正焦弦為水平線，且其長度為 4

### 一、答題結果分析

表 4-3-1　　「開口方向的判斷」答對率

| 題目 | 三（1） | 三（2） | 三（3） | 三（4） | 三（5） | 三（6） | 三（7） | 三（8） |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答對率 | 75.6％ | 65.9％ | 24.4％ | 70.8％ | 69.5％ | 90.2％ | 75.6％ | 76.8％ |

從答題結果來看，答題率最高的是第 6 小題，即給予“準線為鉛直線”的條件，有 $90.2\%$ 的同學可以正確找出其拋物線的開口方向。答對率最低的則是第 3 小題，給予拋物線的定義式，僅有 $24.4\%$ 的同學可以根據定義式裡的準線與焦點來找出其拋物線的開口方向。

若將題目分為以“標準式 一般式 定義式 以及與拋物線相關名詞之走向”來判斷拋物線開口方向，則由上表的答對率中可發現學生在題目給予“與拋物線相關名詞之走向”的條件下（第 6、7、8 小題），其答對率較高。

二、試題分析

整理高一與高二的拋物線相關課程後，對於拋物線的開口與方程式的關係，我們可以得到以下的結論：

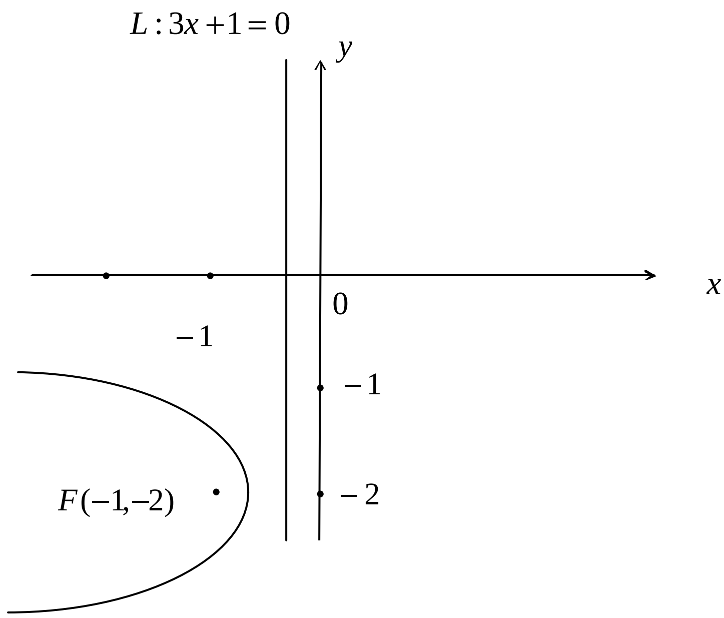
表 4-3-2　拋物線的開口方向與方程式的關係

| | | 標準式 | 一般式 |
|---|---|---|---|
| 上下型 | 開口朝上 | $(x-h)^2=4c(y-k)$， $c>0$ | $y=ax^2+bx+c$， $a>0$ |
| | 開口朝下 | $(x-h)^2=4c(y-k)$， $c<0$ | $y=ax^2+bx+c$， $a<0$ |
| 左右型 | 開口朝右 | $(y-k)^2=4c(x-h)$， $c>0$ | $x=ay^2+by+c$， $a>0$ |
| | 開口朝左 | $(y-k)^2=4c(x-h)$， $c<0$ | $x=ay^2+by+c$， $a<0$ |

因此對於第 1 小題、第 2 小題、以及第 4 小題而言，可透過移項或配方，即可找出其對應的開口方向。第 1 小題整理後為 $(y-2)^2=\frac{-7}{4}(x+1)$，其開口方向是朝右的，故應選擇 B。第 2 小題整理後可得 $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}$，對應到一般式裡的開口朝上，所以應選擇 A。第 4 小題 $x=5y^2+2$ 是一般式裡的開口朝右，故選擇 B。第 3 小題與第 5 小題則是拋物線中的定義式，且兩個小題都不需移項就能讀出其對應的焦點或準線。從 $\overline{PF}=d(P,L)$（其中 $P\ (x,y)$ 為拋物線上的動點， $F$ 為焦

**點，** $L$ **為準線）的定義式中觀察出，等號左邊** $\overline{PF}$ **代表的是兩點距離，等號右邊** $d(P,L)$ **則是點到直線的距離。因此，在第 3 小題的** $\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\frac{|3x+1|}{3}$ **式子裡，可以讀出此拋物線的焦點為** $F(-1,-2)$**，且其準線為** $L:3x+1=0$**，最後，從焦點與準線的相對位置關係大致描圖後，就能判斷出拋物線的開口方向了。如下圖所示：**

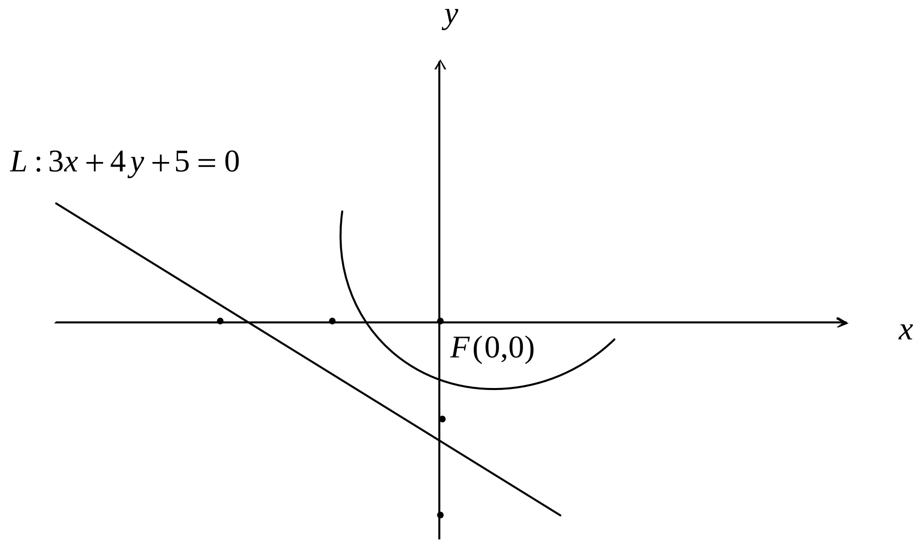
**圖 4-3-1　從** $\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\frac{|3x+1|}{3}$ **判斷開口方向之解說圖**




**從上圖中，準線為鉛直線，焦點在準線的左側，因此拋物線的開口要朝向左方，故應選擇 C。**

**同理，從第 5 小題** $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|3x+4y+5|}{5}$ **的式子中，可以讀出其為焦點** $F(0,0)$ **且準線** $L:3x+4y+5=0$ **的拋物線，再根據作圖來找出拋物線的開口方向，如下圖所示：**

圖 4-3-2 從$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|3x+4y+5|}{5}$判斷開口方向之解說圖




從上圖觀察得知，準線為一斜直線且焦點在準線的右上方，因此拋物線開口並非是朝上下左右的方向，故應選擇 E。

至於第 6、7、8 小題則是從拋物線的相關名詞來判斷開口方向。第 6 小題僅給予準線為鉛直線的條件，並沒有給出焦點的相對位置，因此焦點可能在準線的右方或左方，若焦點在準線的右方，則如同第 3 小題的作圖方式可發線拋物線開口方向是朝右的；同樣地，若焦點在準線的左方，亦可由圖形中觀察得知拋物線的開口朝左。因此第 6 小題從兩種情況分析的結果，應選擇 C 和 D。

若是給予對稱軸的條件，如第 7 小題的“對稱軸為鉛直線，焦距為 5”，從對稱軸為鉛直線可以知道拋物線開口有可能朝上或朝下，焦距為 5 並不會影響拋物線的開口方向，所以第 7 小題也是有兩種可能的情況，應選擇 A 和 B。

第 8 小題的題目為“正焦弦為水平線，且其長度為 4”，其中正焦弦長的長度並不會影響拋物線的開口方向，所以其中“長度為 4”的條件是多餘的，而從正焦弦為水平線的條件，其實就相當於說明這個拋物線的對稱軸是鉛直線，因為從拋物線的圖形關係很清楚能知道正焦弦是與對稱軸垂直的，所以第 8 小題與第 7 小題是一樣的結果，拋物線的開口有朝上或朝下這兩種可能，因此選擇 A 和 B。

## 三、學生作答情形

**此大題共有 8 個小題，每一小題的答題情形分布如下：**

**表 4-3-3　「開口方向的判斷」答案統計表**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第一小題 | ★*C* | *D* | *E* | B | *A* | *CD* | AB | | |
| 人數百分比 | 75.6% | 6.1% | 6.1% | 4.9% | 3.7% | 2.4% | 1.2% | | |
| 第二小題 | ★*A* | *E* | *B* | C | *D* | *AB* | CD | | |
| 人數百分比 | 65.9% | 12.2% | 11.0% | 4.9% | 3.7% | 2.5% | 1.2% | | |
| 第三小題 | ★*C* | *E* | *D* | *B* | *A* | *CD* | 空白 | *AB* | |
| 人數百分比 | 24.4% | 35.4% | 9.8% | 6.1% | 11.0% | 6.1% | 3.7% | 1.2% | |
| 第四小題 | ★*D* | *A* | *E* | C | *CD* | B | | | |
| 人數百分比 | 70.8% | 8.5% | 8.5% | 7.3% | 4.9% | 1.2% | | | |
| 第五小題 | ★*E* | *A* | 空白 | *B* | *C* | *D* | *AD* | *AB* | *CD* |
| 人數百分比 | 69.5% | 4.9% | 4.9% | 6.1% | 4.9% | 4.9% | 1.2% | 1.2% | 1.2% |
| 第六小題 | ★*CD* | *ABCD* | *E* | 空白 | AB | | | | |
| 人數百分比 | 90.2% | 3.7% | 2.4% | 2.4% | 1.2% | | | | |
| 第七小題 | ★*AB* | *A* | CD | *ABCD* | *D* | 空白 | AD | | |
| 人數百分比 | 75.6% | 8.5% | 4.9% | 3.7% | 2.4% | 2.4% | 1.2% | | |
| 第八小題 | ★*AB* | *CD* | *ABCD* | *E* | 空白 | B | | | |
| 人數百分比 | 76.8% | 11.0% | 4.9% | 2.4% | 2.4% | 1.2% | | | |

## 四、訪談資料分析

### （一）正確答題的想法

**在接受訪談的學生當中，第四大題開口方向的判斷完全答對的有 S2（高分**

組，女）、S3（高分組，男）。另外錯一題的有 S1（高分組，男）、S4（中分組，女）、以及 S5（中分組，男），分別是答錯了第 3 小題、第 8 小題、以及第 3 小題。以下分別是研究者與 S2 的訪談摘要。

1、將第 1、2、4 小題整理成標準式來判斷

S2（高分組，女）

**T：妳是怎麼判斷第 1 小題** $-4(y-2)^2=7(x+1)$ **拋物線的開口方向？**

**S2：這個式子可以整理成** $(y-2)^2=\frac{-7}{4}(x+1)$**，<u>這個是左右型的標準式</u>，又** $\frac{-7}{4}<0$**，所以它的開口應該是朝左。**

**T：妳是如何判斷第 2 小題** $3x^2-9y+1=0$ **拋物線的開口方向？**

**S2：這個我可以整理成** $(x-0)^2=3(y-\frac{1}{9})$**，<u>所以是上下型的標準式</u>，而** $3>0$**，所以它的開口應該要朝上。**

**T：還有那一小題也是要配成標準式來判斷的呢？**

**S2：第 4 小題，這個可以寫成** $(y-0)^2=\frac{1}{5}(x-2)$**，也是左右型的，又** $\frac{1}{5}>0$**，所以開口朝右。**

2、以圖解方式來判斷拋物線的開口方向

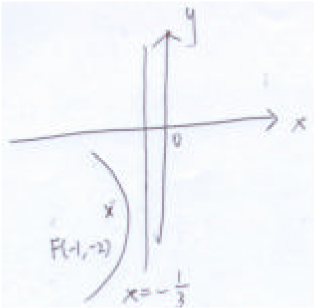
S2（高分組，女）

**T：妳是怎麼判斷第 3 小題** $\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\frac{|3x+1|}{3}$ **拋物線的開口方向？**

**S2：<u>$3x+1=0$ 就是 $x=\frac{-1}{3}$，這是一條鉛直線，焦點在 $(-1,-2)$，這個畫圖就知道了。</u>**

**T：將妳的圖形畫出來看看。**

**S2：（畫圖）**




**所以拋物線開口應該要朝左。**

**T：第 5 小題** $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|3x+4y+5|}{5}$ **妳是如何判斷它的開口方向的？**

**S2：我也是畫圖，跟第 3 小題一樣。**

**T：還有那些小題妳是用畫圖的方式來判斷開口方向的？**

**S2：剩下的第 6、7、8 小題都一樣用畫圖的就可以知道了。**

**（二）作答錯誤學生的想法**

**1、只看標準式等號右邊的係數**

S7（低分組、女）

**T：妳覺得第 1 小題** $-4(y-2)^2=7(x+1)$ **拋物線的開口方向為何？**

**S7：我覺得是朝右吧！**

**T：妳怎麼判斷的呢？**

**S7：因為這個方程式對應的開口方向不是朝左就是朝右，而等號右邊的 7 是正的，所以開口應該要朝右。**

在拋物線標準式 $(y-k)^2=4c(x-h)$ 中，$c>0$ 則拋物線開口朝右，$c<0$ 則拋物線開口朝左。而這一錯誤類型的學生只看標準式等號右邊的係數，對這一小題的題目 $-4(y-2)^2=7(x+1)$ 而言，等號右邊的係數是 $7$，而 $7>0$，所以判斷出拋物線開口朝右。

**2、將 $x$ 與 $y$ 的對應關係搞錯**

S9（低分組，女）

**T：妳覺得第 1 小題 $-4(y-2)^2=7(x+1)$ 拋物線的開口方向為何？**

**S9：應該是朝下。**

**T：妳是怎麼判斷的？**

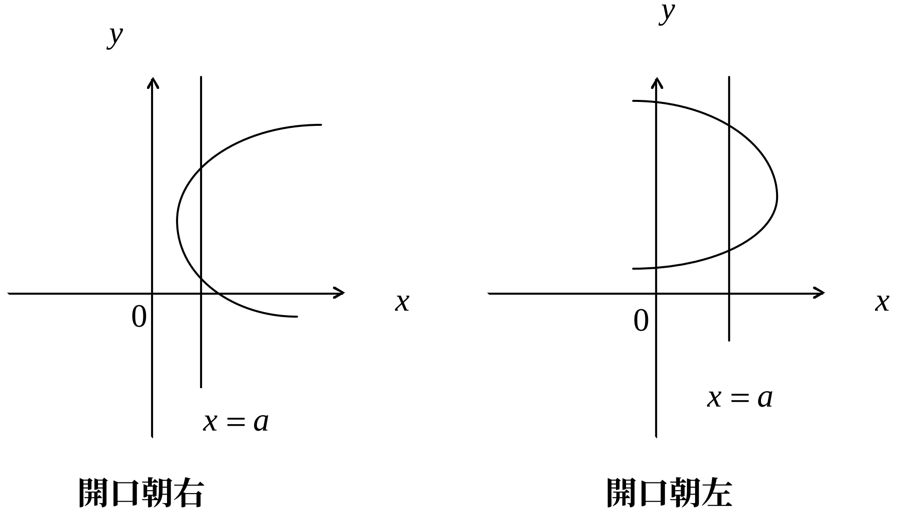
**S9：<u>因為它可以解出 $y=2\pm\sqrt{\frac{7}{-4}(x+1)}$，等號左邊只有一個 $y$，等號右邊卻有兩個 $x$，這樣畫出來開口不是朝上就是朝下</u>。**

**T：那妳為什麼又認為開口是朝下呢？**

**S9：因為好像有教過用係數的正負號來判斷，這個寫成 $(y-2)^2=\frac{-7}{4}(x+1)$ 就可以知道因為 $\frac{-7}{4}<0$，所以開口朝下。**

**若我們從 $y^2=x$ 這個方程式來分析，每代入一個 $x$ 值，除了 $x=0$ 外，必然會有兩個 $y$ 值與之對應，例如當 $x=4$ 時，$y$ 就有 $\pm 2$ 這兩個值與之對應；$x=a$ 時，$y$ 就有 $\pm\sqrt{a}$ 這兩個值與之對應。所以，一個 $x$ 值對應到兩個 $y$ 值或者是兩個 y 值對應到一個 $x$ 值，其拋物線圖形畫出來應該是開口朝左或開口朝右的。同理，對於 $(y-h)^2=4c(x-h)$ 或是未移項前的 $a(y-h)^2=b(x-k)$ 這類的方程式而言，拋物線的開口方向也都有相同的結果，如下圖：**

**圖 4-3-3　拋物線「一個 $x$ 值對應到兩個 $y$ 值」之圖形**



但有某一類型的學生對$y^2=x$這個方程式的解讀卻剛好相反，他們先將$y^2=x$兩邊開根號，化成$y=\pm\sqrt{x}$，等號左邊是一個$y$，等號右邊卻有兩個$x$值與之對應，因此這一類型的學生認為這樣的方程式是一個$y$值對應到兩個$x$值或者是兩個$x$值對應到一個$y$值，所以其拋物線圖形畫出來應該是開口朝上或開口朝下的。

3、認為只要是用定義式表示，其拋物線圖形的開口一定是朝斜的方向。

S1（高分組，男）

T：你認為第 3 小題$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\frac{|3x+1|}{3}$的開口方向為何？

S1：我覺得它的開口是朝斜的。

T：你是怎麼判斷的？

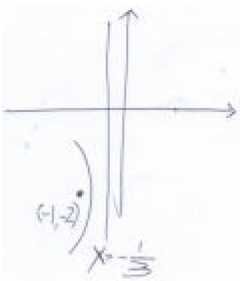
S1：<u>因為它是用定義式表示，通常用會定義式表示的就是因為不能寫成$(y-k)^2=4c(x-h)$或者是$(x-h)^2=4c(y-k)$，所以開口不是朝上、下、左、右</u>。

T：既然你認為是朝斜的，那麼你認為是斜向那個方向呢？

S1：這個要畫圖才知道。

T：你畫畫看。

S1：




咦？我剛剛說錯了，這個拋物線的開口應該要朝左才對。

從研究者與 S01 的訪談中可以知道，S01 認為一般拋物線方程式都可以寫成標準式，，而標準式對應的開口方向只會有朝上、朝下、朝左、朝右這四種。S01

認為若題目沒有用標準式來表示拋物線方程式，那麼這個拋物線的開口方向就應該是朝向斜的；然而事實並不然，因為所有的拋物線標準式畢竟是由其定義式推導出來的，標準式的推導只是利用定義式裡的準線為鉛直線和水平線的特殊情形，才會對應到拋物線圖形的開口只有朝上、朝下、朝左、朝右這四種。如果用準線為斜直線的情形來代入拋物線的定義式，則經過平方後會產生 $xy$ 項而導致最後無法配方成為像 $(y-k)^2=4c(x-h)$ 或者是 $(x-h)^2=4c(y-k)$ 這麼漂亮的標準式，所以準線為斜直線或者是開口朝向斜的拋物線方程式通常都只會用定義式表示，但並不代表用定義式表示的拋物線開口方向就一定是朝斜的。

4、對從拋物線方程式與其開口方向的關係毫無概念

S8（低分組，男）

T：你認為第 1 小題 $-4(y-2)^2=7(x+1)$ 的拋物線開口方向應該朝向那個方向？

S8：我也不知道，應該是朝下吧。

T：你是怎麼判斷的呢？

S8：<u>這個好像背過，但是我忘記了</u>。

T：那你覺得第 2 小題 $3x^2-9y+1=0$ 的拋物線開口方向應該朝向那裡？

S8：這個應該是朝上吧。

T：你為什麼會覺得它朝上呢？

S8：高一有教過，$y=ax^2+bx+c$，如果 $a>0$ 的話，開口就會朝上。

T：這個方程式的 $a$ 是多少？

S8：它移項後再整理成 $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}$，所以 $a$ 是 $\frac{1}{3}$

T：你覺得第 4 小題 $x=5y^2+2$ 的拋物線開口應該朝向那裡呢？

S8：這個應該是朝左或朝右的吧，我猜是朝左。

從研究者與 S8 的訪談中，可以發現 S08 對高一所學過的拋物線開口方向的判斷法則記憶得非常清楚，對於不屬於高一所學的 $y=ax^2+bx+c$ 的型式的拋物

線方程式，他仍舊憑藉著高二才學過的記憶來作答，也就是這個學生對於方程式與開口方向的關係不僅不能推導，也沒有舉一反三的能力。

5、焦距的值會影響拋物線的開口方向

S5（中分組，男）

T：你覺得第 7 小題？“ 對稱軸為鉛直線，焦距為 5 ” 的條件拋物線的開口方向為何？

S5：我覺得它的開口是朝上。

T：你是怎麼判斷的呢？

S5：這個用畫圖的，對稱軸為鉛直線，畫圖知道它的拋物線開口應該是朝上或者是朝下。可是題目又說焦距是 5，所以開口是朝上的。

T：你認為焦距的值與開口方向有什麼關係？

S5：<u>焦距如果是正的，$c$就會大於 0，那麼拋物線的開口應該是朝上或者是朝右</u>。

T：你的$c$指的是什麼呢？

S5：就是$(x-h)^2=4c(y-k)$或$(y-k)^2=4c(x-h)$裡面的$c$呀。

從研究者與 S5 的訪談中可以知道，S5 認為焦距的正負與拋物線的開口方向有關係，因此從題意中“ 焦距為 5 ” 的這個條件判讀出拋物線的開口是朝上的結論。事實上，焦距並無所謂正負之分，因為焦距代表的是焦點到頂點的距離，距離當然不可能是負的。而 S5 誤將$(x-h)^2=4c(y-k)$或$(y-k)^2=4c(x-h)$裡面的$c$當成是焦距，因此產生“ 焦距的值影響拋物線開口方向 ” 的錯誤觀念。

## 第四節　正焦弦長的性質

在拋物線的紙筆測驗中，第五大題是屬於「拋物線的性質」中與正焦弦長有關的性質，從圖形的關係中探討學生對正焦弦長的瞭解，其試題如下：

**四、如下圖圖（二）所示,**

・C

・B

・ $A$

準線 $L$　　　　圖（二）

**若拋物線之準線為 $L$，則在圖（二）的 $A,B,C$ 三點中，以那一點為焦點的拋物線開口會較大？_____,**

**並請說明您如此判斷的理由：______________________________**

______________________________________________________

______________________________________________________

______________________________________________________

______________________________________________________

______________________________________________________。

### 一、答題結果分析

表 4-4-1　「拋物線的性質—正焦弦長」答案統計表

| 作答答案 | A | B | ★C | 一樣大 | 空白 |
|---|---|---|---|---|---|
| 人數百分比 | 14.7％ | 4.9％ | 70.7％ | 7.3％ | 2.4％ |

從作答的答案來看，大部份的同學是答對的，選擇的 C 點是離準線 L 最遠的點，但次多的14.7％的同學卻選擇了離 L 最近的 A 點。也有同學認為不管選擇那一個點為焦點，其所形成的拋物線開口都會一樣大。

另外，有53.7％的同學在理由論述部分是完全正確的，也就是有13％的學生雖知道選擇以 C 點為焦點的拋物線開口會較大，但其在理由論述部分卻無法解

釋清楚。

二、試題分析

在高一提過的二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 中，討論過其圖形為拋物線，並且以 $|a|$ 之大小來比較拋物線的開口大小。$|a|$ 愈大，則拋物線的開口愈小；反之，$|a|$ 愈小，則拋物線的開口就愈大。舉例來說，$y = \frac{-1}{2}x^2$ 與 $y = 2x^2$ 這兩個拋物線圖形，因為 $\left|\frac{-1}{2}\right| < |2|$，所以拋物線 $y = \frac{-1}{2}x^2$ 的開口會較拋物線 $y = 2x^2$ 的開口大。有了這樣的規律，由方程式的移項或經圖形的旋轉後，我們可以得到其它類似的規律，如下表所示：

表 4-4-2　拋物線圖形開口大小與其方程式係數之關係

| | 決定開口大小之係數 | 判斷方法 |
|---|---|---|
| 標準式<br>$(x-h)^2 = 4c(y-k)$<br>$(y-k)^2 = 4c(x-h)$ | $c$ | $\|c\|$ 愈小，則拋物線開口就愈小 |
| 一般式<br>$y = ax^2 + bx + c$<br>$x = ay^2 + by + c$ | $a$ | $\|a\|$ 愈大，則拋物線的開口愈小 |

$|c|$ 值的大小與 $4|c|$ 大小是成正比關係，而從拋物線標準式的推導過程中，$|c|$ 所代表的幾何意義為拋物線的焦距，$4|c|$ 的幾何意義則為正焦弦長，因此我們可以得到一個結論：正焦弦長的值可影響拋物線開口大小，正焦弦長之值愈大者，則開口愈大；反之，正焦弦長之值愈小者，則開口愈小。

從圖形的關係來分析，若有兩個拋物線：$\Gamma_1 : y = x^2$，$\Gamma_2 : y = ax^2$ 且 $a > 1$，這兩個拋物線的焦點分別為 $F_1(0, \frac{1}{4})$ 與 $F_2(0, \frac{1}{4a})$，正焦弦長分別為 $1$ 與 $\frac{1}{a}$。我們

想從圖形關係來比較拋物線開口大小，就必須先找出通過同一個故定點的的水平弦長來比較，因此不妨考慮以通過 $F_2(0,\frac{1}{4a})$ 的水平弦長來比較。對 $\Gamma_1$ 而言，要找出通過 $F_2(0,\frac{1}{4a})$ 的水平弦長 $\overline{PQ}$，只要透過解圖形的交點即可：

$\begin{cases} \text{水平線}: y=\frac{1}{4a} \\ \text{拋物線}\Gamma_1 : y=x^2 \end{cases}$　　得出兩圖形的焦點坐標 $P(\frac{-1}{2\sqrt{a}},\frac{1}{4a})$， $Q(\frac{1}{2\sqrt{a}},\frac{1}{4a})$

所以 $\overline{PQ}=\frac{1}{\sqrt{a}}$

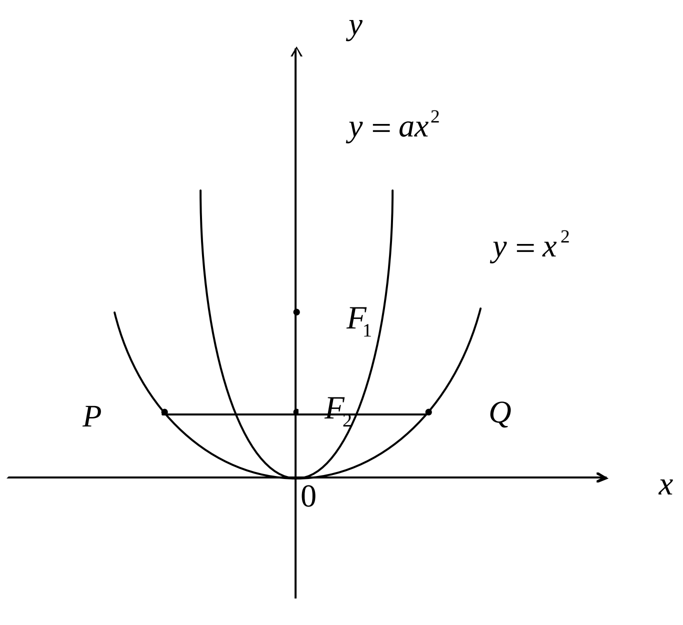
對 $\Gamma_2$ 而言，通過 $F_2(0,\frac{1}{4a})$ 的水平弦長即為 $\Gamma_2$ 的正焦弦長 $\frac{1}{a}$

因為 $a>1$，所以 $\frac{1}{\sqrt{a}}>\frac{1}{a}$，

也就是在比較 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 中通過同一點的水平弦長後發現，$\Gamma_1$ 部份的水平弦長會較長，故拋物線 $\Gamma_1$ 的開口較拋物線 $\Gamma_2$ 的開口大。

另外，$\Gamma_1$ 的正焦弦長為 1，$1>\frac{1}{\sqrt{a}}$，也就是拋物線 $\Gamma_1$ 的正焦弦長較拋物線 $\Gamma_2$ 的正焦弦長之值大，從這裡我們可以得到“拋物線的正焦弦長與拋物線開口大小關係是一致的”的結論。下圖為以上所敘的圖形關係：

圖 4-4-1　$y=ax^2$ 與 $y=x^2$ 之圖形關係



那麼若給予定義式，則應如何比較拋物線的開口大小呢？從前面的分析中，開口大小與正焦弦長有密不可分的關係，正焦弦長的值愈大，拋物線的開口當然就愈大。因此，從定義式中讀出拋物線的焦點與準線後，可利用正焦弦長的性質，即正焦弦的長度為四倍的焦距，或者是正焦弦的長度為焦點到準線距離的兩倍之關係，就能以正焦弦的長度來比較拋物線的開口大小了。

在這一題中，很明顯的以 C 點為焦點，到準線 L 的距離會是最大的，因此以 C 點為焦點的正焦弦長會最長，也就是其對應到的拋物線開口會最大。

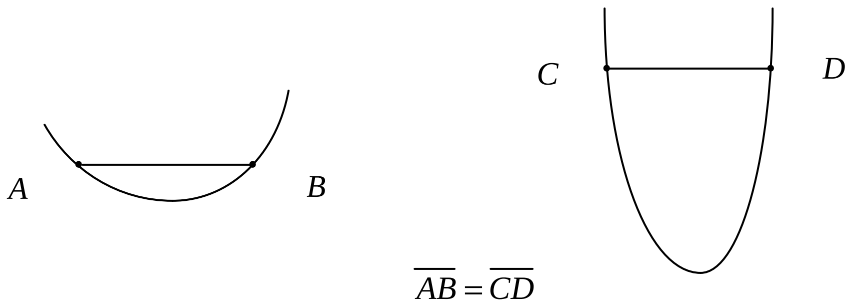
三、學生作答錯誤類型

給予固定一條準線，分別以三個不同位置當作焦點的拋物線中，比較其開口大小的題型裡，學生作答的錯誤類型主要有下列幾種情形：

（一）拋物線的開口都一樣大

這一類型的學生認為不管給予什麼條件，或者不管拋物線的開口朝向什麼方向，都可透過旋轉讓開口朝向同一個方向後，再延長拋物線的兩側使之達到同寬，如此所有的拋物線開口都會一樣大。如下圖所示：

圖 4-4-2　學生由 $\overline{AB}=\overline{CD}$，認為「拋物線的開口都一樣大」




$\overline{AB}=\overline{CD}$

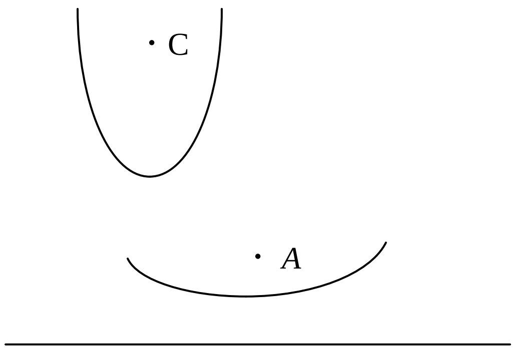
（二）拋物線的開口無限大

在沒有範圍限制的條件下，拋物線的兩側是可以無限延伸的，因此會有學生認為既然拋物線的兩側可以無限延伸，那麼其開口就應該是無限大。也就是說，這一類的學生認為所謂的“開口”，指的是拋物線的最外圍兩側的張開範圍。

（三）比較焦點到準線的距離，但結論相反

比較焦點到準線的距離，就判斷開口的方法而言其實其方向是對的。但是卻有一些學生在比較完距離後，對開口大小的排列順序剛好是相反的，也就是在這一題的開口大小順序，應該是以 C 點為焦點的拋物線開口較大，B 點次之，A 點最小。然而這一部份的學生卻是認為以 A 為焦點的拋物線開口較大，B 點次之，C 點最小。從這類學生的作圖可以觀察出，以離準線愈遠的點為焦點，其所畫出的拋物線就愈狹長；以離準線愈近的點為焦點，其所畫出的拋物線就愈寬且短。如下圖：

圖 4-4-3　學生「以焦點離準線之距」判斷出相反的開口大小關係




*L*（準線）

四、訪談資料分析

（一）正確答題的想法

S2（高分組，女）

T：在 A、B、C 三點中，妳覺得以那一點為焦點的拋物線開口較大？

S2：是 C 點。

T：為什麼呢？

S2：<u>因為 C 點離準線較遠，所以正焦弦長就會比較長，這樣的拋物線開口當然也會比較大</u>。

T：為什麼離準線較遠，正焦弦長就會比較長？

S2：因為 <u>C 點離準線的距離是焦距的兩倍，而正焦弦長是焦距的四倍</u>。

（二）作答錯誤學生的想法

S7（低分組，女）

**T：在 A、B、C 三點中，妳覺得以那一點為焦點的拋物線開口較大？**

**S7：應該是 A 點。**

**T：為什麼妳認為是 A 點？**

**S7：因為 A 點較接近準線，所以開口會較大；如果離準線較遠，開口會較小。**

**T：為什麼選擇的焦點愈接近準線，開口就會愈大？**

**S7：<u>感覺上就是這樣吧！焦點離準線愈近，圖形應該就要愈寬；焦點離準線愈遠，圖形就會愈細長</u>。**

**T：是根據妳的感覺嗎？有沒有其它方法可以說明？**

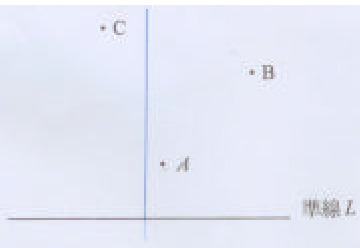
**S7：不知道耶，就是感覺應該要這樣。**

從研究者與 S7 的訪談中，可以知道 S7 是憑著自己對圖形的感覺來回答這樣的問題，S7 認為焦點離準線愈近，圖形應該就要愈寬，那麼拋物線的開口就會較大；焦點離準線愈遠，圖形就會愈細長，那麼拋物線的開口就會比較小。

S9（低分組，女）

**T：在 A、B、C 三點中，妳覺得以那一點為焦點的拋物線開口較大？**

**S9：（畫圖）**




**我覺得應該是 B 點。**

**T：為什麼妳認為是 B 點？**

**S9：因為對稱軸垂直準線 $L$，而 B 點距離對稱軸最遠。**

**T：<u>對稱軸在那裡</u>？**

S9：(手指著圖中剛剛畫上去的鉛直線) 這條線就是對稱軸。

T：為什麼認為這一條鉛直線是拋物線的對稱軸呢？

S9：應該是這一條沒錯呀！拋物線的對稱軸不是應該就要跟它的準線互相垂直的嗎？

T：妳認為跟這條準線垂直的直線有幾條呢？

S9：有很多條。

T：那為什麼妳會認為對稱軸是這一條鉛直線呢？

S9：對稱軸不是要在中間嗎？

T：在那裡的中間呢？

S9：我取準線的中間點再作垂線，這個垂線就是對稱軸了。

T：那為什麼以距離對稱軸愈遠的點當焦點，拋物線的開口就會比較大呢？

S9：這個......，好像很自然就是這樣吧，我也不知道怎麼解釋。

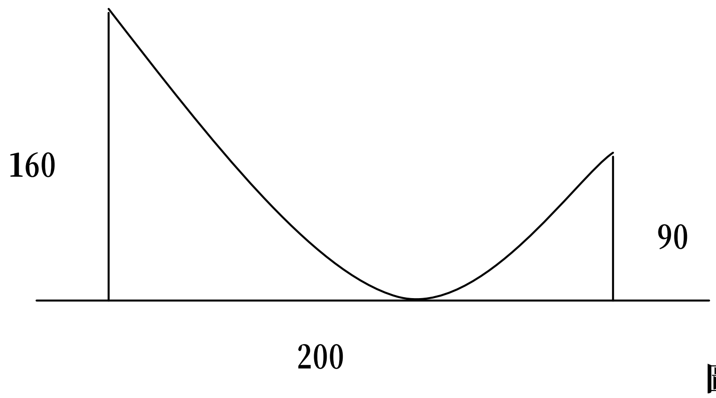
從研究者與 S9 的訪談中可以知道，S9 對於對稱軸的找法其實是有問題的。S9 認為“對稱軸”就是要落在整個圖形的中間部分，因此她選取了圖中準線的中點後並過此點作垂線，而這條垂線就是她所謂的“對稱軸”。找到了對稱軸之後，S9 認為焦點離對稱軸愈遠，那麼拋物線的開口就會愈大，但 S9 卻無法說明她如此判斷的原因。從整個題目的敘述來看，題目是問“圖中 $A,B,C$ 三點中，以那一點為焦點的拋物線開口會較大？”而若我們分別以 $A,B,C$ 三點為焦點，那麼畫出來的拋物線應該會有三種情形，且其對應的對稱軸應該會有三條，但 S9 卻只作了一條對稱軸。此外，焦點應該要落在對稱軸上，而 S9 畫出來的對稱軸並沒有包含 $A,B,C$ 三點中的任何一點，可見 S9 對拋物線圖形的中名詞的基本相對位置關係是模糊不清的。

## 第二部分

### 第五節　拋物線的應用

在拋物線的紙筆測驗中，第六大題是屬於「拋物線的應用」的題型，從日常生活假設性的拋物線問題中，了解學生對拋物線方程式的活用程度。其題目如下：

五、
如下圖圖（三）所示，在街道上有相對的兩大樓，相距 200 公尺，樓高分別為 160 公尺與 90 公尺，今做一電線，電線的兩端為兩大樓之樓頂，電線懸掛於兩大樓之間並假設呈拋物線，且電線的最低點恰巧碰觸到地面，則電線的最低點離 160 公尺的大樓樓底之距離為何？




圖（三）

【請將您的計算過程詳細列出來】：

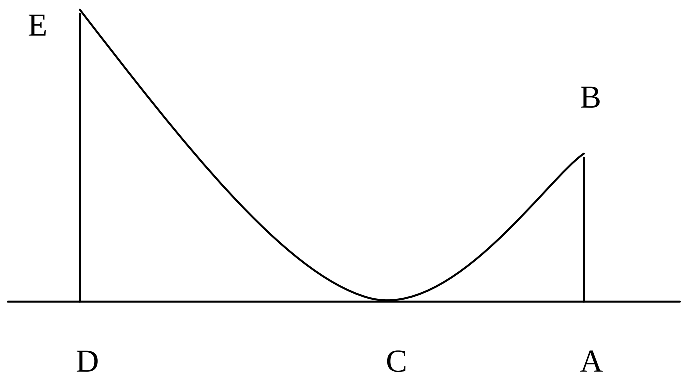
一、答題結果分析

在 82 位接受施測的學生當中，只有 7 位學生是完全作答正確的，也就是這一題的答對率只有8.5％。另外，有29％的學生此題是空白的，52％的學生是以相似三角形的做法來解。

二、試題分析

此題的設計與本研究的研究動機相呼應，題目給的資訊包括兩大樓的樓高、兩大樓間的距離、以及連接兩大樓樓頂的電線呈拋物線的形狀。

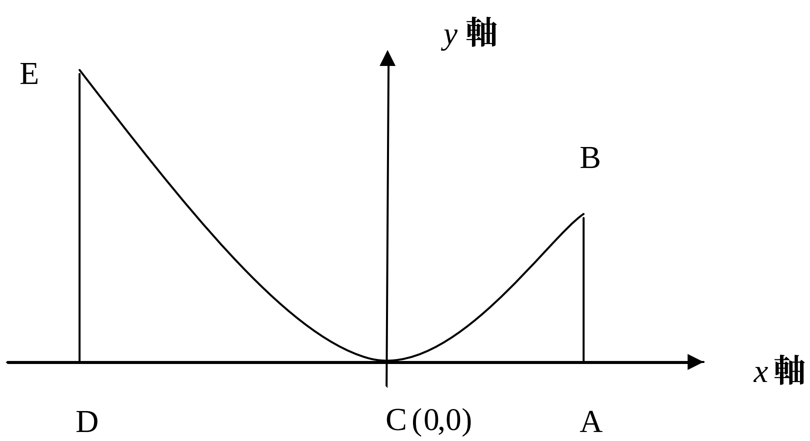
**圖 4-5-1　「拋物線的應用」之解說圖一**




若我們將圖形上的點標記出來，可以發現題目給的條件就是：$\overline{AB}=90$，$\overline{DE}=160$，$\overline{AD}=200$，以及曲線 $BCE$ 為拋物線。再分析題目最後想找的部分，其實就是上面圖形中的 $\overline{CD}$。由於拋物線是一個平面幾何的圖形，因此此題若建立座標系，將點座標化，再根據條件找出 $C$ 點與 $D$ 點的座標，那就可以進而求出 $\overline{CD}$ 了。

有了建立座標系的構想後，接下來的第一個步驟便是放置 $x$ 軸、$y$ 軸、以及原點的位置。此題的拋物線為一個不對稱的拋物線，但仍然可以很清楚地看出拋物線接觸到地面的 $C$ 點即為這個拋物線的頂點。因此，我們不妨以 $C$ 點為此座標系的原點，而習慣上 $x$ 軸為水平線，$y$ 軸為鉛直線，所以我們可以將過 $C$ 點的水平線當作 $x$ 軸，並將過 $C$ 點的鉛直線當作 $y$ 軸。

**圖 4-5-2　「拋物線的應用」之解說圖二**



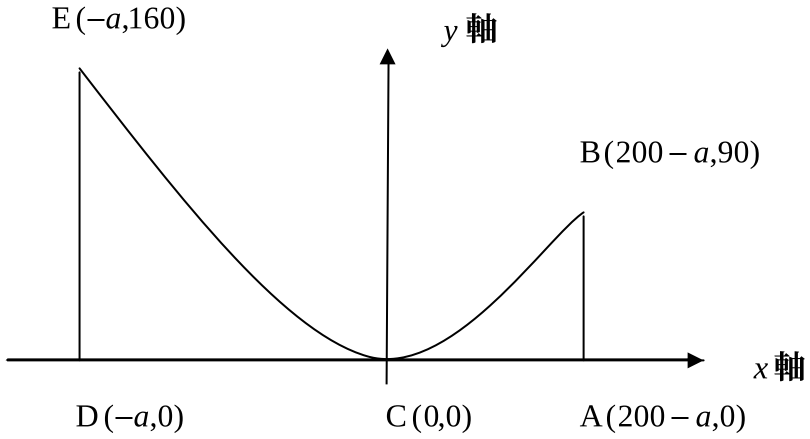
建立座標系後，接下來就得想辦法找出$D$點的點座標了。從題目的條件我們只知道$\overline{AD}=200$，$\overline{CD}$是$\overline{AD}$的一部分，若只從線段的分割來分析，那麼$\overline{CD}$會有很多種可能，也就是$\overline{CD}$只要是介於$0$到$200$之間的值，都有可能會是所求，所以光從$x$軸上的線段來分析，顯然條件是不夠的。$\overline{CD}$的值是我們最終想找的，若從座標來看，因為我們已經將$C$點定為原點了，$D$點又與$C$點在同一水平線上，因此只要找出$D$點的$x$座標就可以知道$\overline{CD}$了。而$\overline{DE}$是一條與$y$軸平行的鉛直線，所以$E$點的$x$座標與$D$點的$x$座標會相同，而且$E$點又在拋物線上，可以透過拋物線的方程式來找出$E$點的$x$座標。

如果想透過拋物線方程式來找出點座標，那就必須將拋物線上的點座標化。我們想找的是$\overline{CD}$，若假設$\overline{CD}=a$，那麼$D$點的座標就是$(-a,0)$，$E$點的座標是$(-a,160)$，同時還可以表示出$A$點的座標是$(200-a,0)$，$B$點的座標$(200-a,90)$。

座標化圖形中的點後，接下來的步驟就是要透過拋物線方程式來找出相關的點座標了。這個拋物線是一個開口朝上的拋物線，頂點我們也將他定為原點了，因此我們可以以高二學過的標準式來假設這個拋物線的方程式：

$(x-0)^2=4c(y-0)$，其中的$x$與$y$分別代表此拋物線上的點的$x$座標與$y$座標，而$|c|$則是代表這個拋物線焦點到頂點的距離。從圖形中，我們並不知道這個拋物線的焦點在哪裡，因此沒有辦法寫出拋物線方程式中的$c$值。

4-5-3　「拋物線的應用」之解說圖三




**若我們能找出方程式中的$c$值，那麼這個拋物線方程式就可以被完整地表示出來，接下來要找$a$的值，就只要藉著代入拋物線上的點$E$或點$B$於拋物線方程式中，就可以找出我們想要的$a$值了。從以上的敘述中，我們可以列出下列的方程式（將點$E$與點$B$代入假設的拋物線方程式$(x-0)^2=4c(y-0)$中）：**

$$\begin{cases}(-a-0)^2=4c(160-0)\\(200-a-0)^2=4c(90-0)\end{cases}$$

**將以上兩式相除後，就可找出$a$的值了：**

$$\frac{(-a-0)^2}{(200-a-0)^2}=\frac{160-0}{90-0}$$

$$\Rightarrow 9a^2=16(200-a)^2$$

$$\Rightarrow (3a)^2-(4(200-a))^2=0$$

$$\Rightarrow (3a+4(200-a))(3a-4(200-a))=0$$

$$\Rightarrow (-a+800)(7a-800)=0$$

$$\Rightarrow a=800 \text{ 或 } \frac{800}{7}$$

**但$a=\overline{CD}$，因此$0<a<200$，所以$a=800$是不合理的，因此此題$a=\frac{800}{7}$，亦即電線的最低點離$160m$的大樓樓底之距為$\frac{800}{7}m$。**

三、學生作答錯誤類型

從上述的試題分析中，可以知道學生至少應具備有五個步驟才能順利答對該題，這五個步驟分別為假設未知數、建立座標係、假設拋物線方程式、將點座標代入拋物線方程式、以及解出正確答案。研究者經過閱卷後，將學生在該題的作答表現所對應到的步驟及其人數整理如下表：

表 4-5-1　「拋物線的應用」解題步驟與人數統計表

| 步驟 | 人數 | 百分比 |
|---|---|---|
| 假設未知數 | 49 | 60.0％ |
| 建立座標系 | 27 | 32.9％ |
| 假設拋物線方程式 | 16 | 19.5％ |
| 將點座標代入拋物線方程式 | 12 | 14.6％ |
| 解出正確答案 | 7 | 8.5％ |

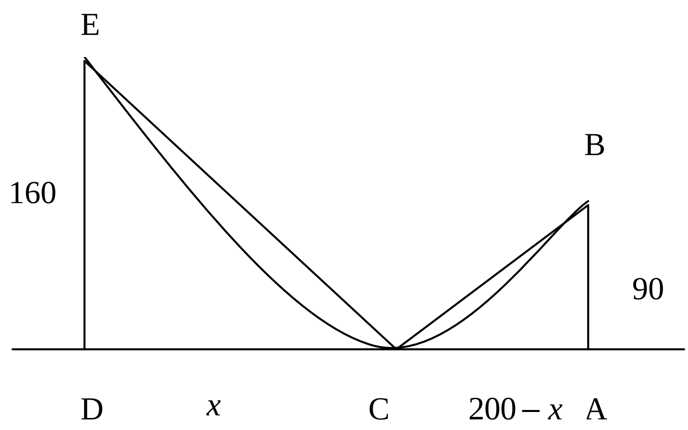
從上表中可以知道在一開使有60.0％會使用假設未知數的方式來表示題目所要求的線段或與所求線段相關的另一條線段，但卻只有32.9％能想到建立座標系，而到假設拋物線方程式時，只剩下19.5％的人能達到這個步驟了，接下來的第四個及第五個步驟的人又更少了。觀察學生在這五個步驟中落差最大的點，就是從假設未知數到建立座標系的這一個環節了，也就是大部分的學生在面對這樣的幾何應用問題，“建立座標系”並不是他們第一個想到的方法，那麼什麼才是他們最常使用的方法呢？從學生在試卷上的答題方法中，研究者整理出多數學生針對該題所使用的解題方法。

1、以相似三角形的做法來求解。

在批閱試卷時，研究者發現有52％的學生會以相似三角形的方式來求解。這些學生的解法主要分為以下兩種類型：

(1)

**圖 4-5-4　以相似三角形解「拋物線的應用題」之解說圖一**

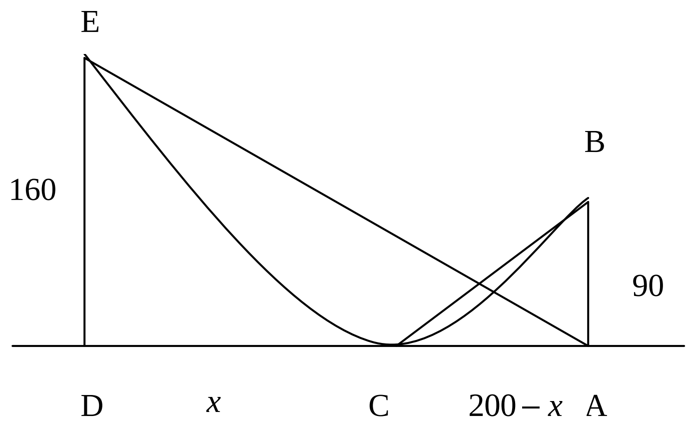



**連接**$\overline{CE}$**與**$\overline{CB}$**，這一類的學生認為**$\Delta ABC \sim \Delta DEC$**，假設所求的**$\overline{CD} = x$**，因此由相似三角形的對應邊成比例可以知道**$\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$**，代入對應的數值後可以得到**$\dfrac{160}{x} = \dfrac{90}{200-x}$**，再經過運算：**$160(200-x) = 90x \Rightarrow x = 128$**，**

**因此，電線的最低點離**$160m$**的大樓樓底之距為**$128$**公尺。**

(2)

**圖 4-5-5　以相似三角形解「拋物線的應用題」之解說圖二**



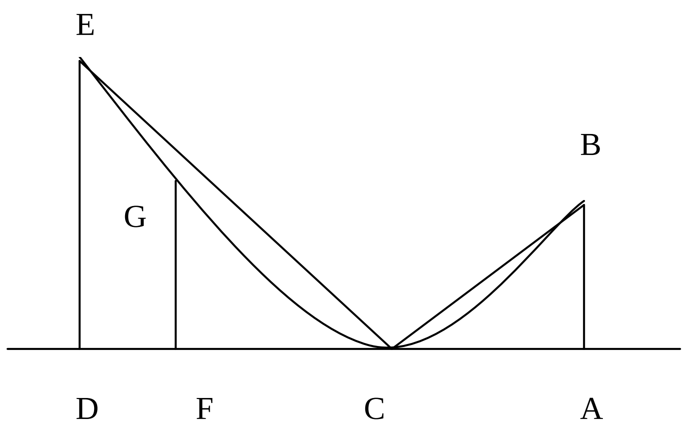

**連接**$\overline{AE}$**與**$\overline{CB}$**，這一類的學生認為**$\Delta CBA \sim \Delta AED$**，假設所求的**$\overline{CD} = x$**，因**

此由相似三角形的對應邊成比例可以知道 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DE}}$，代入對應的數值後可以得到 $\frac{200-x}{90}=\frac{200}{160}$，再經過運算：$160(200-x)=18000 \Rightarrow x=\frac{350}{4}$，

因此，電線的最低點離 $160m$ 的大樓樓底之距為 $\frac{350}{4}$ 公尺。

以上這兩種類型的學生皆未用到“懸掛於兩大樓之間的電線呈拋物線的形狀”的條件，而且在使用到相似三角形的對應邊成比例來進行運算時，皆未先說明其三角形“相似”的原因。事實上，以上用到的三角形之間並無相似的關係。如第（1）種情形的學生認為 $\Delta ABC \sim \Delta DEC$，如果這兩個三角形真的會相似，那麼它們的對應角應該要相等才對。很明顯地，這兩個三角形都是直角三角形，如果要說明它們相似，只要再找到一組對應角相等即可，因此，我們不妨觀察 $\angle ACB$ 與 $\angle DCE$ 這一組對應角之間的關係：

圖 4-5-6　以相似三角形解「拋物線的應用題」之解說圖三




我們可以在 $\overline{CD}$ 上取一點 F，並過點 F 做一垂線 $\overline{FG}$，使 $\overline{FG} \perp \overline{CD}$ 且點 G 再拋物線上，如此一來，根據拋物線的對稱性，我們可以得到 $\Delta ABC \cong \Delta FGC$，所以 $\angle ACB = \angle FCG$，但又因為 $\overline{CD}$ 與 $\overline{CE}$ 這兩線段的傾斜程度是不一樣的，表示 $\angle FCG \neq \angle DEC$，所以我們又可以得到 $\angle ACB \neq \angle DEC$，也就是 $\angle ACB$ 與 $\angle DCE$ 這一組對應角之間並不相等，如此就可以說明 $\Delta ABC$ 與 $\Delta DEC$ 這兩個三角形之間

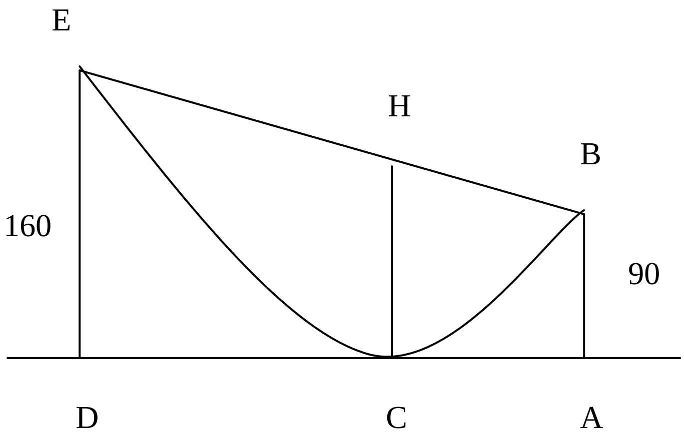
並沒有全等的關係。

至於在第（2）種情形中，其利用$\Delta CBA \sim \Delta AED$而運算出來的$\overline{CD}$是$\frac{350}{4}$公尺， 那麼$\overline{AC}$則是用整個$\overline{AD}$減去$\overline{CD}$來求得，可以得到$200-\frac{350}{4}=\frac{450}{4}$，也就是$\overline{AC}$是$\frac{450}{4}$公尺，但這明顯是不合理的，因為就拋物線的對稱性來看，D 點離頂點 C 的距離比 A 點離頂點 C 的距離還遠，所以$\overline{CD} > \overline{AC}$，但從（2）的情況中卻得到$\overline{CD} < \overline{AC}$的結論，顯然是一開始在使用相似三角形的步驟是有問題的。我們除了從答案的合理性中來分析外，其實在一開始列出$\Delta CBA \sim \Delta AED$的關係時，並沒有辦法從任何幾何角度上去說明這兩個三角形有對應角上面的相等情形，因此直接說明這兩個三角形會相似顯然是過於牽強了。

2、誤用梯型的中線公式

這一類型的學生仍未用到“ 建立座標系 ”的做法，觀察他們的做法，發現他們在解題的過程中連接了$\overline{BE}$，並過$C$點做一垂線交$\overline{BE}$於$H$點，如下圖：

圖 4-5-7　以梯形的中線公式解「拋物線的應用題」之解說圖



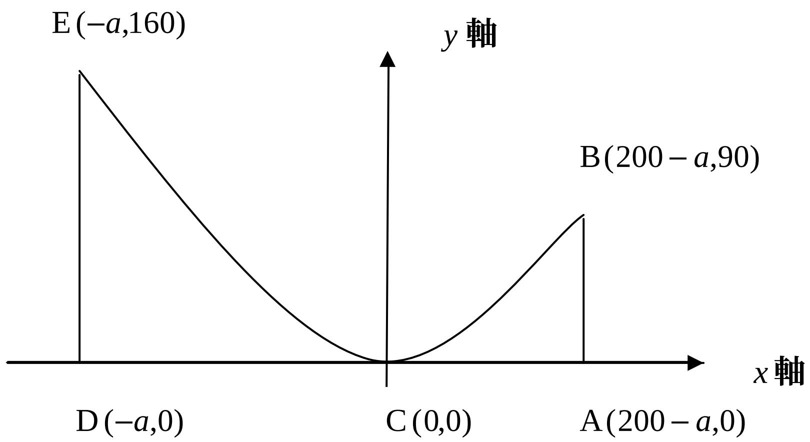

並寫出“ $\overline{CH}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{DE})=\frac{1}{2}(90+160)=75$ ”這樣的式子。很明顯地，這個式子是錯誤的。從拋物線的對稱性可以知道$\overline{CD} > \overline{AC}$，在梯形$ABED$中，因為

$\overline{CD} > \overline{AC}$，也就是點$C$並不是中點，$\overline{BE}$邊上的$H$點也不會是中點，所以$\overline{CH}$並不會等於$\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{DE})$。

3、不會將點代入拋物線方程式

從前面的方析當中知道，在建立座標系後並座標化圖中相關的點之後，接下來就是將拋物線上的點代入一開始假設的拋物線方程式當中。然而從批閱試卷的過程中，發現到有一些學生已經將相關的點都座標化了，也將題目中的拋物線以方程式假設出來了，但卻不會將拋物線上的點代入拋物線方程式。在這些學生的計算過程中，發現學生以$(x-h)^2 = 4c(y-k)$這樣的拋物線標準式來表示題目中的拋物線方程式，

圖 4-5-8　建立座標係後的拋物線應用題



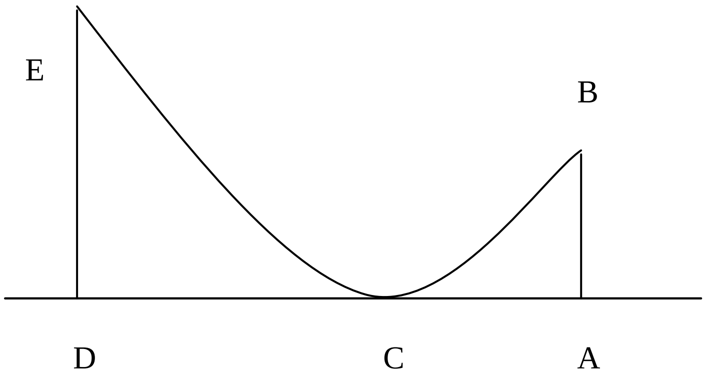

而要將拋物中的點（B、C、E）代入方程式時，卻搞不清楚應該要將這些點代入方程式中的$h$、$k$，還是該將這些點代入方程式中的$x$、$y$。

四、訪談資料

在此題拋物線應用問題中，除了用文字敘述外，還另外附上了一個圖形，但在這圖形當中並沒有標示出相關點的代數符號，而以下為了方便研究者整理訪談的資料，研究者將90公尺的大樓樓底以A點表示，其樓頂以B點表示；並將160公尺的大樓樓底以D點表示，其樓頂以E底表示；令外也將連接兩大樓樓頂的電

線（呈拋物線）與地平面所接觸的那一個點以 C 點表示，如下圖：

圖 4-5-9　以英文代號標示拋物線應用題的各相關點




在閱卷時，研究者從學生的答題表現與其對應到的解題步驟分別予以計分，只要其解題的方法有達到五個步驟中的一個步驟，那麼就會得到 1 分。從評分的方式可以知道最高分者為 5 分，共有 7 人，研究者便從這 7 人中選 1 人（U1）來進行訪談。另外，研究者也訪談了一位低分組的學生（U2）。

（一）正確答題的想法

U1（高分組，男）

T：你對這一題的解法有甚麼想法呢？

U1：這個要建立座標系。

T：你要怎麼建立座標系？

U1：把拋物線的頂點假設為原點，這樣子地平面就是 $x$ 軸，通過原點的鉛直線就是 $y$ 軸。

T：你怎麼會想要把拋物線的頂點假設為座標系中的原點？

U1：這樣拋物線方程式的樣子才比較漂亮呀！我把頂點定為原點，那麼拋物線方程式就可以假設為 $(x-0)^2=4c(y-0)$，也就是 $x^2=4cy$。

T：你所假設的拋物線方程式 $x^2=4cy$ 中，$x$、$c$、還有 $y$ 這三個代數代表的是什麼呢？

U1：$(x, y)$ 是拋物線上的點，$c$ 應該就是一個未知數吧！

T：假設完拋物線方程式之後，你接下來要怎麼做？

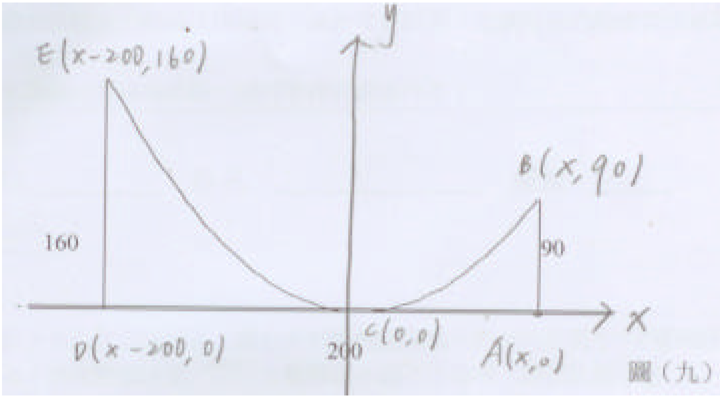
U1：就? 點進去拋物線方程式裡吧！

T：你要帶哪些點進去方程式呢？

U1：要帶拋物線上的點，不過要先有點的座標才行。

T：那你怎麼找這些點的座標呢？

U1：




我假設右邊這一段 $\overline{AC}$ 長為 $x$，這樣 $A$ 點的座標就是 $(x,0)$，$B$ 點的座標就是 $(x,90)$；至於在頂點左邊的這一段 $\overline{CD}$ 長是 $20-x$，那麼 $D$ 點的座標就是 $(x-20,0)$，還有 $E$ 點的座標是 $(x-20,160)$。接下來，我就可以把 $B$ 點和 $E$ 點代入我剛剛假設的拋物線方程式了。

T：為什麼會想要將這兩個點代入拋物線方程式呢？

U1：因為我要找出 $x$ 呀，只要我找到 $x$，那 $200-x$ 就是這一題的答案了。

T：你將這兩點代入後的方程組為何？

U1：$\begin{cases} x^2 = 4c(90) \\ (x-200)^2 = 4c(160) \end{cases}$

T：接下來呢？

U1：接下來就可以解出 $x$ 了，我可以將兩式相除比較快，這樣可以直接解出 $x$ 的值。

由以上研究者與 U1 的訪談中可以發現，U1 對於題意的認知很清楚，除了能

夠透過代數符號將所求的部份表示出來，也能充分運用到"電線呈拋物線"的已知條件來列出拋物線方程式，並透過拋物線方程式和點坐標之間的關係來列出方程組，以求出題目所要的部分。而在這些過程中，最關鍵的應該就是 U1 懂得利用建立坐標系的方式，將幾何圖形代數化，透過代數式找出幾何中的未知部分。

（二）作答錯誤學生的想法

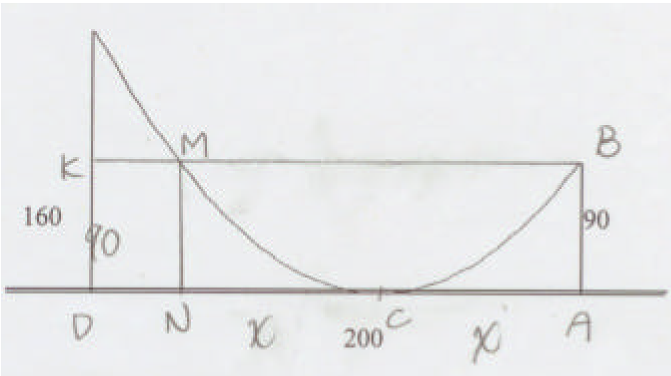
U2（低分組，女）

**T：這個題目妳讀完以後，知道題目中最後所要求的是圖形中的那一個部分嗎？**

**U2：知道，是$\overline{CD}$。**

**T：那妳要如何找出這一個線段長呢？**

**U2：(畫圖)**




**先過 B 點對$\overline{DE}$作垂線，假設交於 K 點，這樣$\overline{DK}=\overline{AB}=90$，我假設$\overline{AC}=x$，這樣$\overline{CD}=200-x$。然後我假設剛剛的$\overline{BK}$和拋物線的交點是$M$點，再過$M$點對$\overline{CD}$作垂線且交$\overline{CD}$於$N$點，因為拋物線會對稱，所以知道$\overline{MN}=90$，還有$\overline{CN}=\overline{AC}=x$。接下來，我要想辦法找$x$。**

**T：妳想要怎麼找$x$呢？**

**U2：** $90:160=x:200-x$

$160x=90(200-x)$

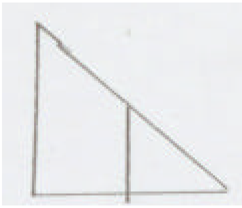
（經過計算）所以 $x=72$，那麼 $\overline{CD}=200-x=200-72=128$

T：妳剛剛寫的“ $90:160=x:200-x$ ”這個式子是怎麼來的？

U2：因為 $\Delta CMN \sim \Delta CED$，由相似三角形的對應邊成比例列出來的。

T：為什麼認為這兩個三角形會相似呢？

U2：咦？它們不是應該要相似嗎？以前有教過，如果圖形是（畫圖）



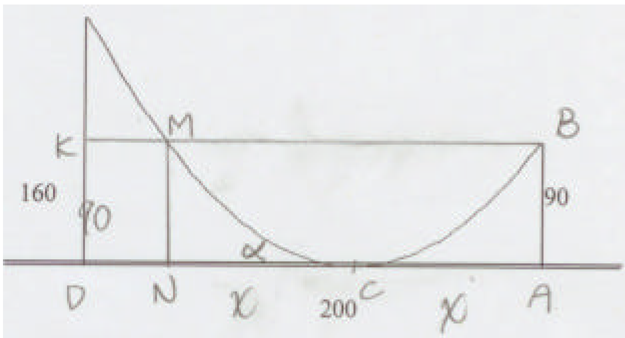
那麼裡面的小三角形就會和外面的大三角形相似。

T：妳還記得要怎麼說明妳剛剛畫的這兩個三角形會相似嗎？

U2：是利用對應的角度相等來說明的。

T：那現在我們回到這個兩大樓的問題上，妳剛剛說 $\Delta CMN \sim \Delta CED$，那麼妳所認為的“對應角”是那些組？

U2：就是（指著圖中 $a$ 的位置）是這兩個三角形的共同角，還有兩個都是直角三角形，所以都有 $90^0$，這樣就可以說明它們相似了。




T：妳認為 $a$ 是角度嗎？

U2：是。

T：圖中的（指著圖中的 CM 曲線）是直線還是曲線？

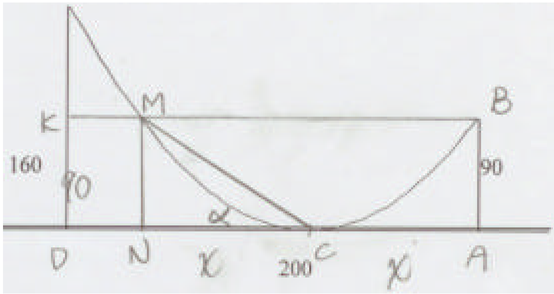
U2：是曲線。

T：那麼妳指的 $a$ 是在那裡呢？

U2：就是這個曲線（指著 CM）和這個直線（指著 CN）之間的角度。

T：那麼$\angle MCN$在那裡呢？

U2：(連接$\overline{CM}$)（指著圖中$\angle MCN$）




T：妳覺得$\angle MCN$和$\alpha$有沒有相等？

U2：沒有。

T：那麼妳剛剛用來說明$\Delta CMN \sim \Delta CED$的其中一組對應角是$\alpha$嗎？

U2：<u>這樣應該就不是了，因為$\alpha$不是$\Delta CMN$的一個內角</u>。

從研究者與 U2 的訪談中可以知道 U2 一開始並沒有根據角度的對應關係相等來說明三角形的相似，而是從圖形中直接認為圖像的相似來說明三角形的相似，但事實上，U2 一開始所說的“$\Delta CMN$”與“$\Delta CED$”其實都不是真的三角形，所以並不能使用相似角形的對應角相來列出對應邊成比例的式子。另一方面，U2 顯然對“角度”的認知並不夠清楚，角度應該是兩個直線交出來的部分，U2 卻認為由一條曲線與一條直線交出來的部分也可以稱為角度。

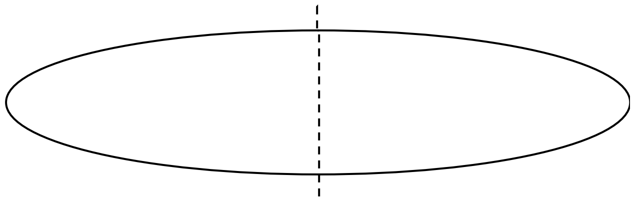
## 第三部分

### 第六節　拋物線與橢圓的圖像關係

在拋物線的紙筆測驗中，第六大題是屬於「拋物線與橢圓的圖像關係」的題型，此大題是以一直線分別從不同的角度切割橢圓後，請同學判別切割後的圖形是否為拋物線。此大題共有六個小題，皆為是非題，並請學生將其判斷的理由說明於每小題之後，題目設計如下：

六、
請判斷下列敘述的正確與否，將你所判斷的結果填入對應的括弧中。
（覺得該小題正確者，請在括弧中畫“○”；覺得該小題不正確者，請在括弧中畫“×”）並請敘述你的答題原因。

1、



圖（四）

如上圖圖（四）所示，沿著虛線從橢圓的短軸處切開，可將橢圓分割成兩個拋物線。

(　　　　)；

原因：

______________________________________________________________________

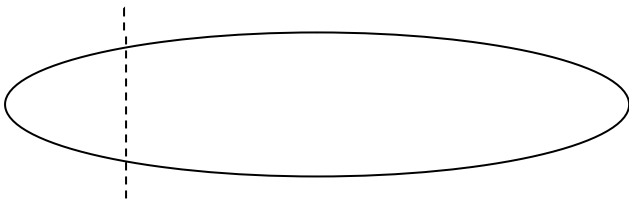
______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________。

2、



圖（五）

如上圖圖（五）所示，沿著虛線對橢圓切開，則左側的圖形為一拋物線。

(　　　　)；

原因：

______________________________________________________________________

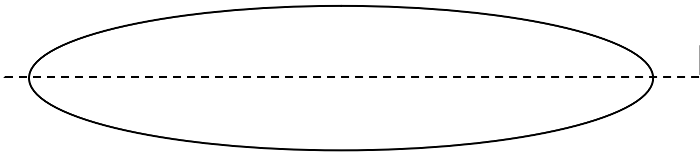
______________________________________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

__________________________________________。

3、



圖（六）

**如上圖圖（六）所示，沿著虛線從橢圓的長軸處切開，可將橢圓分割成兩個拋物線。**

（　　　　）；

**原因：**

____________________________________________

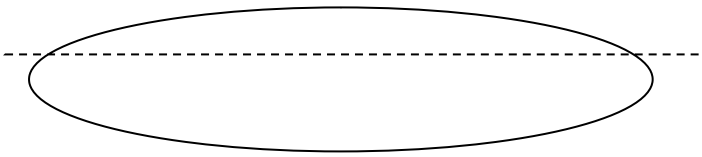
____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

__________________________________________。

4、



圖（七）

**如上圖圖（七）所示，沿著虛線對橢圓切開，則上側的圖形為一拋物線。**

（　　　　）；

**原因：**

____________________________________________

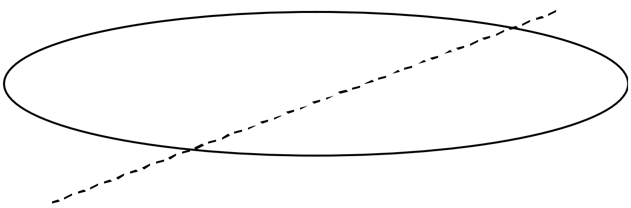
____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

__________________________________________。

5、



圖（八）

**如上圖圖（八）所示，沿著虛線通過橢圓中心對橢圓切開，則可將橢圓分割成兩個拋物線。**

（　　　　）；

原因：

______________________________________________________________

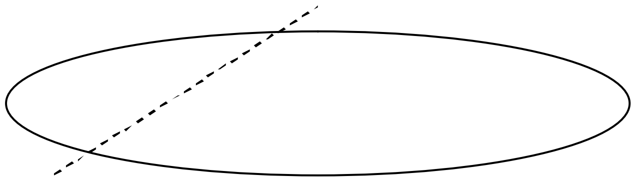
______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________。

6、



圖（九）

如上圖圖（九）所示，沿著虛線不通過橢圓中心對橢圓切開，則左上部的圖形為一拋物線。

（　　　　）；

原因：

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________。

一、答題結果分析

（一）是非題答題結果

從 82 位同學的紙筆作答結果中，各小題在是非題的答對率如下表 4-6-1：

表 4-6-1　「拋物線與橢圓的圖像關係」是非題答對率

| 題號 | 第 1 小題 | 第 2 小題 | 第 3 小題 | 第 4 小題 | 第 5 小題 | 第 6 小題 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 答對率 | 24.39％ | 34.15％ | 51.22％ | 34.15％ | 78.05％ | 53.66％ |

事實上，不論直線從什麼方向來對這個橫橢圓作切割，被切割開來的部分圖形都不會是拋物線，因此作答正確的同學，表示其在該小題畫註的記號為「×」，而計算各小題是非題答對率的方式，即是找出該小題在全部作答的 82 名學生中，畫記為「×」的人數百分比。

就是非題的答對率來看，答對率最高的是第 5 小題，以斜直線通過橫橢圓中心對橫橢圓切開，將橫橢圓分割成兩個部分，有78.05％的同學認為分割後的兩

個部分的圖形都不是拋物線。答對率最低的是第 1 小題，以鉛直線通過橫橢圓中心對橫橢圓切開，有 $24.39\%$ 的同學認為被此鉛直線分割後的兩個部分都不是拋物線。

若就整個大題的施測結果來看，每位學生作答此大題會有 6 個測試次，參與此大題測試的有 82 名學生，因此此大題共有 $6\times82=492$ 個測試次，而答對了 226 個測試次，將這兩個測試次相除，可以得知僅有 $45.93\%$ 的答對率，如此的結果顯示學生在該大題的表現是比隨機猜測的結果（$50\%$）更差。

就相似題型的作答分析而言，我們可以分成以下 A、B 兩個部分來探討：

A、以直線通過橫橢圓的中心與不通過橫橢圓中心來切割橫橢圓

1、第 2、4、6 小題的作答分析

第 2 小題與第 4 小題是性質較相同的題型，第 2 小題是以鉛直線不通過橫橢圓中心對橫橢圓來切割，而第 4 小題只是將第 2 小題中的「鉛直線」改為「水平線」，一樣是不通過橫橢圓中心而對橫橢圓切割，兩個小題都是要學生判斷被切割後較小的部分圖形是否為拋物線。從答題結果來看，這兩小題的答對率都是 $34.15\%$，而這兩小題的學生答題情形如下表：

表 4-6-2　「拋物線與橢圓的圖像關係」第 2、4 小題答題結果比較

| 第 2、4 小題 | 兩題皆答對 | 兩題皆答錯 | 兩題中對一題 |
|---|---|---|---|
| 人數百分比 | $24.39\%$ | $60.98\%$ | $14.63\%$ |

從上表可以知道，兩題皆對與兩題皆錯的人數百分比分別為 $24.39\%$ 與 $60.98\%$，因此這兩題學生的答題一致率為 $85.37\%$，比起隨機分派的一致率（$34.15\%\times34.15\%+(1-34.15\%)\times(1-34.15\%)=55.02\%$）高出甚多，因此可以顯示學生在這兩題的作答上，隨機回答的可能性甚小。

觀察第 2、4、6 這三個相似的題型的作答情形，發現第 6 小題的答對率是相對較高的。而第 6 小題雖與第 2、4 小題一樣不通過橫橢圓中心對橫橢圓作切割，

但切割後的圖形卻明顯是不對稱的，與第 2、4 小題切割後仍為對稱的圖形是不同的。而在翰教科書裡的出現的拋物線圖形，全部都是對稱的，因此從答對率的表現與題型裡的相異之處來看，推測學生應該受到了教科書上的拋物線圖形影響，認為“拋物線圖形是一個對稱的曲線，而如果不是對稱的曲線，這個圖形就不是拋物線”。

2、第 1、3、5 小題的作答分析

第 1 小題與第 3 小題的題型設計是相似的，第 1 小題是以鉛直線通過橫橢圓中心將橫橢圓分割成全等的左右兩部分，第 3 小題則是以水平線通過橫橢圓中心將橫橢圓分割成上下兩部分，這兩個小題都是要請學生來判斷被直線切割開來後的部分是否為拋物線。雖然這兩個小題是屬於相似的題型，但卻發現學生的作答表現有不小的差異（答對率分別為24.39％與51.22％）。從學生的判斷理由中，發現有許多學生認為“第 1 小題以鉛直線通過中心切割橫橢圓後，被切割開來的圖形各含有原來橢圓的一個焦點，而拋物線也剛好有一個焦點，因此從焦點的因素來看，第 1 小題的結果是拋物線圖形。”再來看看第 3 小題，明顯地這一題的橫橢圓被水平線通過中心切割後，切割開來的圖形都已不包含原來橢圓的焦點了。

觀察第 1、3、5 小題的答對率，第 5 小題的答對率是較高的，這一題同時也是全部 6 個小題中學生的作答表現最正確的。從學生的判斷理由中，有不少學生都認為“拋物線開口會愈來愈大，不可能會縮小。”此題被斜直線以通過中心的方式切割橢圓，雖然被切割後的兩個部份仍如第 1 小題一樣各包含一個焦點，但圖形本身已不像拋物線了。

B、以鉛直線、水平線、斜直線來切割橢圓

以鉛直線（第 1、2 小題）、水平線（第 3、4 小題）、斜直線（第 5、6 小題）這三個不同方向的直線來切割橫橢圓，觀察學生的答題情形，發現以斜直線來切

割橫橢圓的答對率較高，而以鉛直線來切割橫橢圓的答對率較低。在教科書上的拋物線圖形多為開口朝向左或右，且全部的拋物線圖形都是對稱的，因此從學生的答題表現不難發現他們的確受到書本上的圖形影響。

（二）學生答題理由分析

在這一個大題的紙筆測驗裡，除了要請學生判斷各小題是否為拋物線外，研究者在每個小題後都請學生寫上各小題的判斷理由，並根據學生所寫的理由來評分，以下是研究者針對這個部分的資料整理：

表 4-6-3　「拋物線與橢圓的圖像關係」各小題答題理由之整理

| | | |
|---|---|---|
| 第 1 小題： | | |
| 答對者的理由 | 橢圓被切開後不會是拋物線。 | 1 分 |
| | 先假設一準線，但無法找到一焦點使橢圓上的點符合拋物線的定義。 | 2 分 |
| | 拋物線與橢圓的定義不同，所以橢圓被切開後不會是拋物線。 | 2 分 |
| | 圖形被切開後開口的兩側會水平一直延伸，所以不是。 | 2 分 |
| | 若將 $y^2=4(x+1)$ 與 $y^2=-4(x-1)$ 這兩個拋物線方程式合併，不管怎麼整理，都寫不出橢圓方程式。……… (*) | 3 分 |
| 答錯者的理由 | 切開後都各有一個焦點，所以是拋物線。 | 0 分 |
| | 看起來很像拋物線。 | |
| 第 2 小題： | | |
| 答對者的理由 | 直線沒有通過中心，因此不能保證左半部是不是還保有焦點。 | 0 分 |
| | 橢圓被切開後不會是拋物線。 | 1 分 |
| | 由第一小題（*）的原因，可知切割橢圓後的部分圖形仍是橢圓，不會是拋物線。 | 3 分 |

| | | |
|---|---|---|
| 答錯者的理由 | 圖形有符合拋物線的定義。 | 0 分 |
| | 看起來很像拋物線。 | |
| 第 3 小題： | | |
| 答對者的理由 | 直線會通過橢圓的焦點切開，切開後的圖形已沒有焦點了，所以不是拋物線。 | 0 分 |
| | 橢圓被切開後不會是拋物線。 | 1 分 |
| | 被切開後的圖形兩側會鉛直向下延伸，所以不是拋物線。 | 2 分 |
| | 由第一小題（*）的原因，可知切割橢圓後的部分圖形仍是橢圓，不會是拋物線。 | 3 分 |
| 答錯者的理由 | 看起來很像拋物線。 | 0 分 |
| 第 4 小題： | | |
| 答對者的理由 | 被切開後的圖形沒有包含焦點，所以不是拋物線。 | 0 分 |
| | 橢圓被切開後不會是拋物線。 | 1 分 |
| | 由第一小題（*）的原因，可知切割橢圓後的部分圖形仍是橢圓，不會是拋物線。 | 3 分 |
| 答錯者的理由 | 看起來像拋物線。 | 0 分 |
| 第 5 小題： | | |
| 答對者的理由 | 被切開後的圖形不對稱，所以不是拋物線。 | 0 分 |
| | 橢圓被切開後不會是拋物線。 | 1 分 |
| | 被切開後的圖形開口反而會縮小，所以不是拋物線。 | 3 分 |
| | 由第一小題（*）的原因，可知切割橢圓後的部分圖形仍是橢圓，不會是拋物線。 | 3 分 |
| 答錯者的 | 跟第 1 小題一樣，切開後的各有一個焦點，所以是拋物線。 | 0 分 |

| | | |
|---|---|---|
| 理由 | 看起來像拋物線。 | |
| 第 6 小題： | | |
| 答對者的理由 | 拋物線是對稱的，可是這個圖形沒有。 | 0 分 |
| | 被切開後不一定有焦點，所以不是拋物線。 | 0 分 |
| | 橢圓被切開後不會是拋物線。 | 1 分 |
| | 由第一小題（*）的原因，可知切割橢圓後的部分圖形仍是橢圓，不會是拋物線。 | 3 分 |
| 答錯者的理由 | 看起來像拋物線。 | 0 分 |

從學生的紙筆測驗中的答題原因來看，會發現即使是對是否為拋物線的判斷結果正確的學生，其判斷的方法卻不一定是正確的，而且大部分的學生都只是很單純地從圖像方面來判斷，而沒有深入運用到拋物線或橢圓的方程式或者是性質。在 82 名接受施測的學生當中，有 13 名是這 6 題完全判斷正確者，但這些學生對這 6 個小題的判斷理由大部分都是以“ 橢圓被切開後不會是拋物線 ”的結論來說明，而未進一步對此結論作解釋，因此，要了解學生心中真正的想法，研究者針對各小題與學生們作一個質性的訪談是有必要的。

二、訪談資料分析

針對此大題，研究者將各小題都以 0~3 分來計分，將此 82 名接受測試者的分數與人數作整理後，研究者挑選出高分群、中分群、以及低分群中各一位學生來進行訪談，其中高分群的學生以 A1 代表，中分群的學生以 A2 代表，低分群的學生以 A3 代表。訪談資料如下：

1、 A1（高分組，男）

T：為什麼你這 6 個小題都認為不是拋物線呢？

A1：因為不論直線怎麼去切割橢圓，切割後的圖形都不會是拋物線。

T：為什麼你會這樣認為呢？

**A1：因為橢圓與拋物線的定義是不一樣的。**

**T：在定義不一樣的情況下，有沒有可能會描繪出同一個圖形呢？**

**A1：應該不可能吧，而且他們的方程式也不一樣。**

**T：可以給我一個橢圓方程式的例子嗎？**

**A1：** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

**T：如果我仿照第 1 小題，以一條鉛直線對這個橢圓從中心切開，你可以找出左半部或右半部的圖形方程式嗎？**

**A1：它還是橢圓方程式，只是** $x$ **的範圍分別被限制了。如果是左半部的橢圓，就是** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$**，** $-2<x<0$ **；如果是右半部的橢圓，就是** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$**，** $0<x<2$**。**

**T：那麼如果我是仿照第 6 小題以斜直線不通過橢圓對橢圓作分割，你怎麼說明被切割開來的圖形不是拋物線呢？**

**A1：應該是一樣的方式吧！我只要限制住** $x$ **座標和** $y$ **座標，就可以寫出方程式了，而且這個方程式還是代表橢圓的一部分。**

從研究者與 A1 的訪談中，可以發現雖然 A1 在紙筆作答中的解釋不足以說服人，但不代表他完全不懂其原因，也許只是其表答能力稍欠訓練吧。A1 點出拋物線與橢圓的定義與方程式是完全不同的，因此不管從任何角度對橢圓作切割，都不可能形成拋物線的。除此之外，A1 更進一步以例子來說明橢圓被切割開來後，方程式只是橢圓方程式多了 $x$ 和 $y$ 的限制，因此還是橢圓的一部分。

2、A2（中分組，女）

**T：為什麼妳覺得第 1 小題的圖形是拋物線？**

**A2：因為這個橢圓本來就有兩個焦點了，如果我從中間切開，那左右兩部分剛好都各一個焦點，而拋物線也是有一個焦點，所以應該是拋物線沒錯。**

**T：那麼第 2 小題呢？**

**A2：這個直線切下去的地方不知道會不會讓左邊的圖形包含橢圓的焦點，所以應該不確定吧！**

**T：妳認為這一題是不確定？**

**A2：<u>不過我覺得有可能是拋物線，搞不好它會產生新的焦點</u>。**

**T：那妳要如何說明它會不會產生新的焦點呢？**

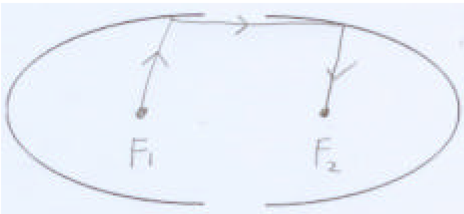
**A2：我也不知道，不過圖形真的很像拋物線。**

**T：如果我有兩個全等的拋物線$\Gamma_1$和$\Gamma_2$，將它們開口處接合後，妳認為新的圖形是橢圓嗎？**

**A2：這個問題好像跟第 1 小題是一樣的，我想這個新圖形應該是橢圓吧！**

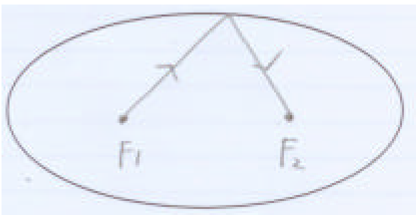
**T：那如果我在$\Gamma_1$的焦點上對著$\Gamma_1$的曲線打出一束光，妳可以畫出這束光的反射情形嗎？**

**A2：（畫圖）**




**T：妳認為這是不是橢圓的光學性質呢？**

**A2：有點像，不過應該不是，橢圓的光學性質應該要這樣畫。（畫圖）**




**我懂了，所以<u>橢圓的焦點並不是拋物線的焦點</u>。**

從研究者與 A2 的談話中，可以知道 A2 是以“焦點”來判斷被直線切割橢圓後的圖形是否為拋物線，A2 起初認為拋物線與橢圓應該會“共享焦點”，但透過研究者以光學性質帶領 A2 思考後，A2 也逐漸從拋物線與橢圓光學性質的不同處中釐清了“共享焦點”的錯誤觀念。

3、A3（低分組，男）

**T：在這些圖形中，你認為有那些會是拋物線？**

**A3：我覺得第 1、2、3、4、6 小題都是拋物線。**

**T：為什麼你認為第 5 小題不是拋物線？**

**A3：<u>因為它開口處變小了，拋物線的開口好像不會縮小</u>。**

**T：你為什麼認為第 1 小題是拋物線呢？**

**A3：<u>這個圖形很像拋物線的圖形，另外 4 個小題也都很像</u>。**

從研究者與 A3 的訪談中，可以知道 A3 完全是以圖形的外觀來判斷是否為拋物線，但從 A3 的回答並對照他的答案，至少可以知道 A3 對拋物線圖形有兩個基本的認識：(1) 拋物線開口處不會縮小（第 5 小題）；(2) 在畫拋物線時，有可能只會畫出其中一部分，不一定會將其對稱的圖形完全畫出來（第 6 題）。