

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

※※※

※

※ 學童解讀線段圖能力之再探 ※

※

※※※

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 90-2413-H-004-012-

執行期間： 90年 8月 1日至 91年 7月 31日

計畫主持人：蔣治邦

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- 赴國外出差或研習心得報告一份
- 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立政治大學心理系

中 華 民 國 91年 7月 31日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

學童解讀線段圖能力之再探

Further Study on Children's Understanding of Line Segment Drawings

計畫編號：NSC 80-2413-H-004-012

執行期限：90年8月1日至91年7月31日

主持人：蔣治邦 國立政治大學心理系

一、中文摘要

在整數加減文字題範圍內，以三、四年級學童為對象，本研究探討兩個問題，線段圖畫法（形式：順向或標準）是否影響學童的選圖表現？在何種狀況下可改善學童的選圖表現？實驗一操弄作業方式與正確線段圖選項的形式，發現：先完成解題活動有助於學童的選圖表現。實驗二操弄正確線段圖選項的形式，加入反映數量關係但其數量表徵不成比例的線段圖選項，發現：三、四年級學童尚未重視線段圖內的比例關係。實驗一、二的資料，皆顯示學童在與標準算式一致的線段圖形式上表現較佳。實驗三設計在同一文字下依序進行圈圖、線段圖與集合圖三類圖形表徵的是非判斷，結果建議：先呈現的正確圈圖有助於線段圖的判斷，但三種圖形表徵系統間的關係，尚需進一步的探討。三個實驗皆顯示四年級學童對圖形的解讀能力優於三年級。

關鍵詞：線段圖、認知發展、加減文字題。

Abstract

With addition and subtraction word problem, this study addressed two following questions in 3rd and 4th grades. The first question was whether the ways of drawing the line segment picture would have an effect on children's performance on a drawing choice task. The correct choice item could be draw corresponded to the situation statements, or to the standard solution of the given word problem. The second question was concerning some potential ways to

improve children's performance. Experiment 1 manipulated the task requirement and the drawing forms. It was found that having children solve the problems first enhance their performance on the drawing choice task. Experiment 2 manipulated the drawing forms and added new choices, which reflect correct relation of quantities of the word problems, but the drawings of those quantities are not in proportion. It was found that 3rd or 4th graders have not noticed the proportion requirement on line drawings. Both the results of Experiment one and two have shown that students did better on items in which the correct choice is correspondent to the standard solution. Experiment 3 designed three types of drawings in a fixed order: token graph, line segment and set diagram with all word problems. Students were required to make a yes/no judgment on each of the drawing items. It was found that having a correct token graph item presented improved the judgment on the following line segment drawing. Across all three experiments, the performance of 4th graders was superior to 3rd graders.

Keywords : line segment drawings, cognitive development, addition and subtraction word problem.

二、緣由與目的

雖然，學習圖形的表徵方法，對問題解決或概念學習到底是有助益或是妨礙？尚有許多的爭論（參見吳昭容，1990; Gutstein & Romberg, 1995）。但是，用圖形來協助對問題情境的理解，是數學解題訓練課程中常談及的建議（Polya, 1945;

Schoenfeld, 1985)，數學教育研究者亦常認為：學童是否能自由的將各種表徵互相翻譯或轉換，是判斷數學概念有意義學習的一項重要指標（朱建正，吳昭容，1993；蔣治邦，2001；Gutstein & Romberg, 1995；Haylock & Cockburn, 1989；Janvier, 1987；Lesh & Landau, 1983），

本研究所關心的圖形表徵，特指使用線段（長度量）來表示問題情境中的數量，並透過線段的空間關係（視覺線索）來表現各數量間的關係，此類數學教育環境中常用的圖形表示法，是文化的產品，特選的圖形表徵系統本身是一種精鍊的溝通工具，它已選擇文字問題情境中的重要資訊（數量與關係），再選擇線段的型式表徵出來，這些選擇的理由皆是隱含的（implicit），圖形本身所提供的視覺線索，並不必然如理想中的那麼明顯易見（transparent）（參見 Cobb, Yackel & Wood, 1992，中相關的討論）。本研究贊同 Gutstein 和 Romberg（1995）的看法：當看到他人描繪的線段圖時，學童是否能賦予正確意義？這是值得關心的研究問題。在這樣的背景下，本研究探討中年級學童線段圖表徵理解能力的發展。

在整數加減運算範圍內，蔣治邦（2001）觀察到中年級學童解題表現優於圖形選擇表現的現象，延續此研究議題，本研究探討兩個問題。第一個問題是：線段圖畫法（形式）是否影響學童選擇正確圖形選項？蔣治邦（2001）研究所採用的文字題，如按語意直接轉譯為算式（順向），皆為開放算式，正確線段圖選項亦多仿開放算式的方法繪製，而學童多採標準算式的解法，若學童尚未發展部份—全體運思，僅配對記憶問題類型與其標準算式解法時，則其對文字題的理解方式與正確線段圖選項不相似，而形成解題表現優於圖形選擇表現的現象，若學童已發展部份—全體運思，能彈性地做「兩個部份集合合成總集合」與「由總集合中分解出一部份集合獲得另一部份集合」兩個描述的互相推論，則上述的不相似應不存在。本研究在實驗一、二，操弄正確選項的設計，

檢驗正確線段圖的畫法（順向或標準）是否影響三、四年級學童的選圖表現。並在實驗二中檢驗線段的長度比例是否影響判斷。

本研究計畫探討的第二個問題是：在何種狀況下可改善學童的選圖表現？中年級學童解題表現優於圖形選擇表現的現象，學童對圖形選擇作業的陌生是另一個可能的原因，實驗一透過選圖作業與「解題+選圖」作業的操弄，檢驗先進行解題活動是否有助於正確線段圖表徵的辨識。另一個想法：透過圈圖的媒介，是否有助於正確線段圖表徵的辨識？圈圖是低年級學童經常賴以解題或溝通的表徵系統，線段圖將圈圖的明確離散數量表徵改變為較不明顯的長度連續量，但仍保持相對的空間關係，如果先觀察到正確的圈圖，是否有助於正確線段圖表徵的辨識？實驗三設計圈圖、線段圖與集合圖三類圖形表徵選項，一方面探究中年級學童對此三種表徵系統的理解能力，更關心在呈現正確的圈圖之後，是否有助於正確線段圖表徵的辨識？

三、結果與討論

實驗一。採取蔣治邦（2001）的合併、改變、等化與比較四類問題情境，透過四個題本的製作，操弄線段圖型式（順向與標準）與作業方式（選圖與解題+選圖），探索解題活動和線段型式對學童選擇正確線段圖的影響。

分別在四類問題情境下，對 484 名三、四年級學童的線段圖選擇表現（參見表一）進行三因子變異數分析，結果顯示：四年級學童的選圖表現在各種問題情境下皆優於三年級（合併： $F(1,476) = 27.65$, $MSe = 1.62$, $p < .05$ ；改變： $F(1,476) = 27.65$, $MSe = 1.46$, $p < .05$ ；等化： $F(1,476) = 13.38$, $MSe = 1.22$, $p < .05$ ；比較： $F(1,476) = 17.51$, $MSe = 1.40$, $p < .05$ ）；學童在三種問題情境下顯示作業方式效果（改變： $F(1,476) = 12.23$, $MSe = 1.46$, $p < .05$ ；等化： $F(1,476) = 29.76$, $MSe = 1.22$, $p < .05$ ；比較： $F(1,476) = 11.27$, $MSe = 1.40$, $p < .05$ ），先完成解題

活動有助於學童的選圖表現，在等化問題情境下，顯著的年級與作業形式交互作用 ($F(1,476) = 3.94, MSe = 1.22, p < .05$) 顯示解題活動的影響在四年級學童的選圖表現上較為明顯。

[插入表一]

以線段圖的形式效果而言，在等化與比較問題情境中，正確選項的形式顯著地影響選圖表現 (等化： $F(1,476) = 20.07, MSe = 1.22, p < .05$ ；比較： $F(1,476) = 12.42, MSe = 1.40, p < .05$)，當正確選項為標準線段圖形式時，學童的選圖表現較優，在比較問題情境中，作業方式與線段圖形式的交互作用 ($F(1,476) = 5.76, MSe = 1.40, p < .05$) 顯示正確選項的形式效果在先要求解題的作業方式下較為明顯；另外，在改變問題情境中，作業方式與線段圖形式的交互作用亦達顯著 ($F(1,476) = 5.21, MSe = 1.46, p < .05$)，在不要求解題的作業方式下，正確選項為順向線段圖時的選圖表現較佳，但在解題之後，學童於順向線段圖形式的選圖表現卻低於標準線段圖形式。

整體而言，在「解題+選圖」作業下，學童解題與選圖表現相當一致 (約 75%)，正確解題伴隨著正確的選圖表現 (70% 以上)，而解題錯誤時，正確選圖的機會下降 (30% 以下)。

實驗二。採取改變和比較兩類問題情境，透過兩個題本的製作，操弄線段圖的型式 (順向與標準)，並在各題本內，操弄正確選項與關係選項 (正確反映數量關係，但線段的長度不符比例) 的相對次序。

分別在兩種問題情境下，對 244 名三、四年級學童的選圖表現 (參見表二) 進行三因子變異數分析，結果顯示：四年級學童選圖表現優於三年級 (改變： $F(1,240) = 7.87, MSe = 2.56, p < .05$ ；比較： $F(1,240) = 9.02, MSe = 1.95, p < .05$)；在比較問題情境下，題本效果達顯著 ($F(1,240) = 89.42, MSe = 1.95, p < .05$)，標準線段圖為正確選項時，學童的表現較佳。

[插入表二]

分析發現顯著的選項次序效果 (改

變： $F(1,240) = 57.72, MSe = 0.51, p < .05$ ；比較： $F(1,240) = 60.58, MSe = 0.58, p < .05$)，當關係選項位於正確選項之前時，錯誤選擇較常發生，假設學童依次審視選項，此結果顯示三、四年級學童尚未重視線段的比例，先看到符合數量關係的關係選項時，會造成錯誤的選擇。

實驗三。採用實驗二相同的文字題，改變與比較問題情境各 8 題，每個文字題下按圈圖、線段圖與集合圖的固定順序呈現三個是非子問題，要求學童對各個圖形做是非的判斷，判斷該圖形是否記錄了文字題的情境。透過兩個題本的製作，操弄各類圖形正確與否的組合。

211 名三、四年級學童的判斷表現呈現於表三，對圈圖進行年級 X 題本的二因子變異數分析，在兩種問題情境下，皆無年級效果，符合低年級學童即已熟悉圈圖的期望，題本主要效果 (改變： $F(1,207) = 26.78, MSe = 4.13, p < .01$ ；比較： $F(1,207) = 18.06, MSe = 4.32, p < .01$) 顯示學童對正確圈圖的判斷較佳，或有判斷給予圖形為正確的傾向，改變問題情境下顯著的年級與題本交互作用， $F(1,207) = 5.27, MSe = 4.13, p < .05$ ，顯示此傾向在四年級時較弱。

[插入表三]

線段圖判斷表現的三因子變異數分析顯示：四年級學童比三年級在改變問題上有較好的線段圖判斷表現， $F(1,207) = 4.15, MSe = 1.85, p < .05$ ；當線段圖為正確時，學童的判斷表現較佳 (改變： $F(1,207) = 27.84, MSe = 0.81, p < .01$ ；比較： $F(1,207) = 14.92, MSe = 1.20, p < .01$)，在比較問題情境中，年級和線段圖正確與否的交互作用 ($F(1,207) = 4.12, MSe = 1.20, p < .05$) 顯示判斷給予圖形為正確的傾向在四年級時較弱；雖然題本效果不顯著，但在比較問題情境中，有顯著的題本和線段圖正確與否的交互作用， $F(1,207) = 10.74, MSe = 1.20, p < .01$ ，顯示審視正確圈圖促進正確線段圖的判斷，部份支持研究假設。

分別對改變與比較問題的集合圖判斷表現進行三因子變異數分析，在改變問題

情境下，四年級學童的集合圖判斷表現優於三年級， $F(1,207) = 3.91$ ， $MSe = 1.79$ ， $p < .05$ ，題本和集合圖正確與否的交互作用達顯著， $F(1,207) = 21.56$ ， $MSe = 0.75$ ， $p < .01$ ，顯示在同一文字題上圈圖與集合圖的正確性不一致時，學童的集合圖判斷表現較好，此現象的理由尚不清楚；在比較問題情境下，變異數分析沒有出現任何顯著的效果。

四、計畫成果自評

按原始計畫執行三個實驗，研究假設學童在解題活動中進行文字題數量關係的理解，實驗一的結果支持此假設，在解題活動後，學童的選圖表現較為優異。解題資料（實驗一）顯示學童常用標準算式的形式解題，此傾向可能使得學童在標準線段圖上的表現優於順向線段圖（實驗一、二），特別是難度較高的比較或等化問題。此傾向似乎建議：學童在教學下，學習使用標準算式的形式，來理解文字題中的數量關係，但此方式的理解，可能著重在加、減運算的判斷，並不必然與文字題的語意相聯結。

延續蔣治邦（2001）的發現，中年級學童在線段圖選圖作業上的困難，與各數量間的關係有關，而與各個數量本身的表徵形式無關，實驗二的結果顯示：在此階段，學童並不在意表徵各數量的線段是否成比例。實驗一、二的結果將進一步地整理，以尋求期刊的發表。

實驗三的結果雖然支持研究假設，但證據尚不充足明顯，學童在是非題上的反應傾向，干擾資料的解讀，但是，提供了足夠的起始資料，以供進一步思考圈圖、線段圖與集合圖三者間的關係。

五、參考文獻

- 朱建正、吳昭容。(1993)。「國小兒童使用數學圖示之發展研究」。國科會研究計畫成果報告。
- 吳昭容。(1990)。「圖示對國小學童解數學應用題之影響」。國立台灣大學心理學研究所未發表之獨立研究。
- 蔣治邦。(2001)。中年級學童「部份—全體」運思的發展：文字題選圖與解題作業表現的差異。「中華心理學刊」，43卷，2期，239-254。
- Cobb, P. Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1): 2-33.
- Gutstein, E. & Romberg, T. A. (1995). Teaching children to add and subtract. *Journal of Mathematical Behavior*, 14: 283-324.
- Haylock, D., & Cockburn, A. (1989). *Understanding early years mathematics*. London: Paul Chapman.
- Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R., & Landau, M. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. in R. Lesh & M. Landau (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.263-343). New York: Academic.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic.

表一
學童在實驗一兩種作業方式、四類問題情境上的選圖表現。

問題情境	作業方式		選圖		解題+選圖					
	年級	線段圖形式	順向	標準	順向	標準				
合併	三	丙 ^a	2.43 ^b	丁	2.53	甲	2.36	乙	2.60	
			(1.32)		(1.11)		(1.54)		(1.45)	
			63		60		61		63	
	四			2.83		3.05		3.07		3.41
		(1.26)		(1.03)		(1.37)		(0.97)		
改變	三	甲	1.97	乙	1.67	丙	2.25	丁	2.53	
			(1.15)		(1.18)		(1.28)		(1.26)	
			61		63		63		60	
	四			2.17		1.95		2.82		3.02
		(1.09)		(1.27)		(1.13)		(1.28)		
等化	三	乙	1.62	甲	1.92	丁	1.73	丙	2.40	
			(1.14)		(1.02)		(1.12)		(1.07)	
			63		61		60		63	
	四			1.77		2.10		2.47		2.80
		(1.20)		(1.10)		(1.20)		(0.97)		
比較	三	丁	1.77	丙	1.79	乙	1.63	甲	2.31	
			(1.20)		(1.12)		(1.08)		(1.22)	
			60		63		63		61	
	四			2.07		2.17		2.30		2.78
		(1.20)		(1.15)		(1.39)		(1.06)		
				58		60		61		58

a：為甲、乙、丙、丁四類題本別。

b：由上而下依序為四題表現上的平均數、標準差與人數。

表二
學童在實驗二各類問題上的選圖表現。

問題情境	線段圖形式	年級			
		三年級		四年級	
		正確選項 在前	關係選項 在前	正確選項 在前	關係選項 在前
改變	順向 (甲 ^b)	1.89 ^c	1.36	2.23	1.74
		(1.29)	(1.21)	(1.26)	(1.45)
	標準 (乙)	61	61	62	62
		1.68	1.19	2.12	1.66
比較	順向 (乙)	(1.09)	(0.98)	(1.35)	(1.22)
		63	63	58	58
	標準 (甲)	1.02	0.62	1.26	0.84
		(1.10)	(0.87)	(1.35)	(1.25)
比較	標準 (甲)	63	63	58	58
		2.23	1.51	2.71	2.08
		(1.10)	(1.01)	(1.11)	(1.19)
		61	61	62	62

a：正確選項與關係選項的相對位置，其中，關係選項正確反映文字題中的數量關係，但線段的長度不符比例。

b：順向與標準正確線段圖在交互設計 (switch design) 中的題本別。

c：由上而下依序為四題表現上的平均數、標準差與人數。

表三
學童在實驗三各類圖形是非判斷題上的表現^a。

問題 情境	圖形類別	年級 題本 答	三年級		四年級	
			甲題本	乙題本	甲題本	乙題本
			正	誤	正	誤
改變	圈圖	正	6.40 ^b (1.40)	誤 4.31 (2.24)	正 6.19 (2.04)	誤 5.39 (2.28)
		正確	3.10 (.97)	2.75 (1.15)	3.27 (1.07)	3.00 (1.07)
	線段圖	錯誤	2.44 (1.23)	2.37 (1.09)	2.73 (1.21)	2.74 (1.37)
		正確	2.40 (1.14)	2.71 (1.07)	2.65 (1.03)	2.93 (1.10)
	集合圖	錯誤	2.72 (1.07)	2.12 (1.13)	2.88 (1.18)	2.51 (1.26)
		誤	4.06 (1.99)	正 5.00 (1.87)	誤 4.15 (2.26)	正 5.65 (2.16)
比較	圈圖	正確	2.48 (1.13)	2.79 (1.00)	2.13 (1.22)	2.89 (1.13)
		錯誤	2.22 (1.31)	1.79 (1.19)	2.27 (1.37)	2.37 (1.36)
	線段圖	正確	2.34 (1.24)	2.02 (1.18)	2.33 (1.31)	2.44 (1.21)
		錯誤	2.16 (1.00)	2.37 (1.21)	2.06 (1.14)	2.49 (1.28)
	集合圖	正	4.06 (1.99)	5.00 (1.87)	4.15 (2.26)	5.65 (2.16)
		誤	4.06 (1.99)	5.00 (1.87)	4.15 (2.26)	5.65 (2.16)
<i>n</i>			50	52	52	57

a：甲版本中八題改變問題的圈圖皆為正確，其中四題配合正確線段圖與錯誤集合圖，另外四題配合錯誤線段圖與正確集合圖，八題比較問題的圈圖皆為錯誤，其中半數的題目配合正確線段圖與錯誤集合圖，另外半數的題目配合錯誤線段圖與正確集合圖，採用交互設計（switch design）的原則，乙版本中改變問題的圈圖為錯誤，比較問題的圈圖為正確，在相同文字題上，所有圖形的正確與否，與甲版本完全相反。

b：由上而下依序為平均數與標準差人數圈圖為八題是非題的得分，其他為四題的得分。